УДК 517.948.32

О символе сингулярного интегрального оператора со сдвигом Карлемана

В. Г. Кравченко, Г. С. Литвинчук

1. Пусть Γ — простой замкнутый контур Ляпунова, $\alpha(t)$ — сохраняющий или изменяющий ориентацию на Γ диффеоморфизм Γ на себя, удовлетворяющий условиям: $\alpha'(t) \in H(\Gamma)$, $\alpha_n(t) = t$, где $\alpha_n(t) = \alpha_{n-1}[\alpha(t)]$, $\alpha_0(t) = t$.

Рассмотрим оператор

$$M = U_{n-1}(B_\alpha) + V_{n-1}(B_\alpha)\, S + D, \tag{1}$$

где $U_{n-1}(B_\alpha) = a_0(t) I + a_1(t) B_\alpha + \ldots + a_{n-1}(t) B_\alpha^{n-1}$, $V_{n-1}(B_\alpha) = c_0(t) I + c_1(t) B_\alpha + \ldots + c_{n-1}(t) B_\alpha^{n-1}$, $a_i(t), c_i(t) \in C(\Gamma)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, $B_\alpha \varphi(t) = \varphi[\alpha(t)]$, $S\varphi(t) = \dfrac{1}{\pi i} \displaystyle\int_\Gamma \dfrac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau$, D — вполне непрерывный оператор.

Теория Нетера операторов вида (1) в пространстве $H(\Gamma)$ построена в работе [1]. Методы работы [1] тривиально переносятся и на операторы вида (1), рассматриваемые в пространствах $L_p(\Gamma)$, $p > 1$.

В работе [2] каждому сингулярному интегральному оператору с ядром Коши поставлена в соответствие некоторая функция двух переменных, названная символом оператора. Понятие символа, позволившее свести алгебру упомянутых операторов к алгебре функций (или матриц-функций), оказалось весьма полезным при дальнейшем развитии теории сингулярных интегральных операторов (см., например, [3]).

В данной статье строится символ оператора (1) в виде матрицы-функции n-го порядка. Доказывается, что невырожденность символа является необходимым и достаточным условием нетеровости оператора M в $L_p(\Gamma)$, $\infty > p > 1$. Индекс нетерова оператора M выражается через его символ. В случае $n = 2$ дается способ вычисления индекса, отличный от указанного в [1].

2. Пусть $\hat{A}$ — алгебра всех линейных ограниченных операторов, действующих в $L_p(\Gamma)$. Множество операторов вида (1), очевидно, образует некоторую подалгебру $\hat{B}$ алгебры $\hat{A}$. Если $\hat{D}$ — двусторонний идеал линейных вполне непрерывных операторов, действующих в $L_p(\Gamma)$, то $\hat{D} \subset \hat{B}$ [3]. Предположим, что диффеоморфизм $\alpha(t)$ сохраняет ориентацию Γ. Рассмотрим алгебру $\hat{M}$ матриц n-го порядка следующего вида:

$$M_n(t, j) = \begin{pmatrix} a_0(t) & a_1(t) & \ldots & a_{n-1}(t) \\ a_{n-1}(\alpha) & a_0(\alpha) & \ldots & a_{n-2}(\alpha) \\ a_{n-2}(\alpha_2) & a_{n-1}(\alpha_2) & \ldots & a_{n-3}(\alpha_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1(\alpha_{n-1}) & a_2(\alpha_{n-1}) & \ldots & a_0(\alpha_{n-1}) \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} c_0(t) & c_1(t) & \ldots & c_{n-1}(t) \\ c_{n-1}(\alpha) & c_0(\alpha) & \ldots & c_{n-2}(\alpha) \\ c_{n-2}(\alpha_2) & c_{n-1}(\alpha_2) & \ldots & c_{n-3}(\alpha_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_1(\alpha_{n-1}) & c_2(\alpha_{n-1}) & \ldots & c_0(\alpha_{n-1}) \end{pmatrix},$$

где переменная j принимает два значения: $j = \pm 1$.

Определение. Матрицу-функцию $M_n(t, j)$ назовем символом оператора M.

Основная теорема. *Фактор-алгебра $\hat{B}/\hat{D}$ изоморфна алгебре $\hat{M}$. Для того чтобы оператор M был нетеровым, необходимо и достаточно* *чтобы символ оператора M был невырожденным. Индекс нетерова оператора M выражается через его символ формулой*

$$\operatorname{Ind} M = \frac{1}{2\pi n}\{\arg\det[M_n(t,-1)\,M_n^{-1}(t,1)]\}. \tag{2}$$

Доказательство. Изоморфизм алгебр $\widehat{B}/\widehat{D}$ и $\widehat{M}$ следует из того, что, как легко видеть, операторы $B_\alpha S - SB_\alpha$ и $aS - Sa$, $a \in C(\Gamma)$, вполне непрерывны. Докажем второе утверждение теоремы. Наряду с оператором $M = M_0$ рассмотрим операторы

$$M_l = \overset{(l)}{U}_{n-1}(B_\alpha) + \overset{(l)}{V}_{n-1}(B_\alpha)\,S + \overset{(l)}{D},\ l = 1,2,\ldots,n-1,$$

где многочлены $\overset{(l)}{U}_{n-1}(B_\alpha)$ и $\overset{(l)}{V}_{n-1}(B_\alpha)$ получены из многочленов $U_{n-1}(B_\alpha)$ и $V_{n-1}(B_\alpha)$ умножением коэффициентов a_k, c_k на ω_k^l, $\omega_k = e^{\frac{2\pi i k}{n}}$, $k = 0,\ldots$ $\ldots, n-1$. Кроме того, рассмотрим в пространстве $L_p^n(\Gamma)$ сингулярный интегральный оператор W без сдвига $W = M_n(t,1)\,P + M_n(t,-1)\,Q + D_1$, $P = \frac{1}{2}(I+S)$, $Q = \frac{1}{2}(I-S)$, $\overset{(l)}{D}$, D_1 — некоторые вполне непрерывные операторы. Пространство $L_p^n(\Gamma)$ можно представить в виде прямой суммы подпространств $L_p^{n,l}(\Gamma)$, где

$$L_p^{n,l}(\Gamma) = \{(\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_n) \in L_p^n(\Gamma),\ \rho_k = \omega_{k-1}^l\,\rho_1(\alpha_{k-1})\}.$$

Из [1] следует, что оператор W инвариантен относительно каждого из подпространств $L_p^{n,l}(\Gamma)$. Кроме того, из [1] также следует, что сужения $W/L_p^{n,l}(\Gamma)$ оператора W на каждое подпространство $L_p^{n,l}(\Gamma)$ эквивалентны соответственно операторам M_l, $l = 0,1,\ldots,n-1$.

Операторы $M = M_0$ и M_l связаны следующими соотношениями:

$$MZ_l(t) - Z_l(t)\,M_l = \widetilde{D}^{(l)},\ l = 1,2,\ldots,n-1, \tag{3}$$

где непрерывные функции $Z_l(t)$ отличны от нуля на Γ и удовлетворяют условиям

$$Z_l[\alpha_k(t)] = \omega_1^{lk} Z_l(t),\ k = 1,2,\ldots,n-1, \tag{4}$$

$\widetilde{D}^{(l)}$ — вполне непрерывные операторы. Равенства (3) проверяются непосредственно. Поэтому достаточно доказать существование функций $Z_l(t)$ с указанными свойствами. Сначала докажем, что функция $\alpha(t)$ не имеет неподвижных точек на Γ. Пусть такая точка $t_0 \in \Gamma$ имеется, т. е. $\alpha(t_0) = t_0$, и пусть t_1 — любая точка контура Γ такая, что $\alpha(t_1) \neq t_1$. Тогда $t_0 \neq t_1$ и замкнутая дуга $[t_0, t_1]$ являются правильной частью Γ. Дуга $[\alpha(t_0), \alpha(t_1)] = [t_0, \alpha(t_1)]$ также является правильной частью Γ, причем возможны два случая:

$$\begin{aligned} &1)\ [t_0, t_1] \subset [t_0, \alpha(t_1)] \subset \Gamma; \\ &2)\ \Gamma \supset [t_0, t_1] \supset [t_0, \alpha(t_1)]. \end{aligned} \tag{5}$$

Рассмотрим случай 1). Из (5) следует (см., например, [4]) цепочка включений

$$[t_0, t_1] \subset [t_0, \alpha(t_1)] \subseteq [t_0, \alpha_2(t_1)] \subseteq \ldots \subseteq [t_0, \alpha_k(t_1)] \subseteq \ldots \subseteq \Gamma. \tag{6}$$

Из (6) имеем, что $[t_0, t_1] \subset [t_0, \alpha_k(t_1))$ для любого k. В частности, $\alpha_n(t_1) \neq \neq t_1$, что противоречит условию. К аналогичному выводу приходим и в случае 2). Возьмем произвольную точку $\tau_0 \in \Gamma$. В силу доказанного свойства гомеоморфизма $\alpha(t)$ контур Γ разбивается на n непересекающихся дуг $\Gamma_1 = (\tau_0, \alpha(\tau_0)), \ldots, \Gamma_n = (\alpha_{n-1}(\tau_0), \tau_0)$. На замыкании $\overline{\Gamma}_1$ дуги Γ_1 зададим произвольную непрерывную функцию $v_l(t)$, которую затем продолжим на весь контур следующим образом:

$$u_l(t) = \begin{cases} v_l(t), & t \in \overline{\Gamma}_1, \\ \overset{(l)}{x}_1(t)\, v_l[\alpha_{-1}(t)], & t \in \overline{\Gamma}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \overset{(l)}{x}_{n-1}(t)\, v_l[\alpha_{-n+1}(t)], & t \in \overline{\Gamma}_n. \end{cases}$$

где $\alpha_{-k}(t) = \alpha_{n-k}(t)$. Функции $Z_l(t) = u_l(t) + \omega_1^{(n-1)l} u_l[\alpha(t)] + \ldots + \omega_1^l u_l[\alpha_{n-1}(t)]$ удовлетворяют условиям (4). Функции $\overset{(l)}{x}_i(t)$, непрерывные соответственно на $\overline{\Gamma}_i$, очевидно, можно выбрать таким образом, чтобы обеспечить непрерывность $u_l(t)$ в точках $\alpha_k(\tau_0)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и неравенство $Z_l(t) \neq 0$ при $t \in \overline{\Gamma}_1$. Последнее неравенство в силу условий (4) будет выполнено и на всем контуре Γ.

Заметим, что соотношение (3) для случая $n = 2$ впервые было указано в работе [5]. К этому же равенству в случае $n = 2$ пришли Н. К. Карапетянц и С. Г. Самко, указав при этом, что $Z(t)$ реализуется в виде $Z(t) = = \alpha(t) - t$.

Опираясь на изложенные выше результаты и теорию систем сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши [6, 7], получаем необходимое и достаточное условие нетеровости оператора M. Действительно, если

$$\det M_n(t, j) \neq 0, \tag{7}$$

то оператор W является нетеровым в $L_p^n(\Gamma)$, а тогда, очевидно, является нетеровым оператор $W/L_p^{n,0}(\Gamma)$ и вместе с ним оператор M. Пусть неравенство (7) не выполняется. Тогда оператор W не нетеров. Так как оператор W представляет собой прямую сумму операторов $W/L_p^{n,l}(\Gamma)$, $l = 0, 1, \ldots, n-1$, то не является нетеровым, по крайней мере, один из операторов $W/L_p^{n,l}(\Gamma)$. Если при этом $l = 0$, то оператор $M = M_0$ не нетеров и необходимость условия (7) установлена. Если $l \neq 0$, то не нетеровым является один из операторов M_l, $l = 1, 2, \ldots, n-1$. В этом случае из соотношения (3) следует, что не нетеровым является и оператор M. Необходимость условия (7) полностью доказана.

Из соотношения (3) также следует, что индексы операторов M_l, $l = = 0, 1, \ldots, n-1$, равны. Тогда равны индексы операторов $W/L_p^{n,l}(\Gamma)$. Отсюда и из того факта, что W представляет собой прямую сумму операторов $W/L_p^{n,l}(\Gamma)$, следует формула (2). Теорема доказана.

3. Пусть $\alpha(t)$ изменяет ориентацию Γ. Покажем, что в этом случае не существует гомеоморфизмов контура Γ на себя, удовлетворяющих условию $\alpha_n(t) = t$ с наименьшим числом $n > 2$.

Предположим противное: $\alpha_n(t)=t$, $n>2$. Число n, очевидно, может быть только четным. Гомеоморфизм $\beta(t)=\alpha[\alpha(t)]$ сохраняет ориентацию Γ и $\beta_{\frac{n}{2}}(t)\equiv t$. Выше показано, что $\beta(t)\not\equiv t$ не имеет неподвижных точек на Γ. С другой стороны, функция $\alpha(t)$ обязательно имеет на Γ две неподвижные точки, и, следовательно, эти точки являются неподвижными для $\beta(t)$. Следовательно, $\beta(t)\equiv t$, т. е. $\alpha_2(t)\equiv t$. Таким образом, достаточно рассмотреть случай $n=2$.

Символ оператора M в этом случае представляет собой матрицу-функцию одного переменного

$$M_2(t)=\begin{pmatrix} a_0(t)-c_0(t) & a_1(t)+c_1(t) \\ a_1(\alpha)-c_1(\alpha) & a_0(\alpha)+c_0(\alpha)\end{pmatrix}.$$

Здесь также имеет место основная теорема, причем необходимость условия нетеровости $\det M_2(t)\neq 0$ устанавливается с помощью непосредственно проверяемого соотношения $SM-M_1S=D$ между операторами M и M_1, а формула для индекса оператора M принимает вид

$$\operatorname{Ind} M=\frac{1}{2\pi}\{\arg\det M_2(t)\}_\Gamma. \tag{8}$$

4. В случае $n=2$ можно вывести формулы (2) и (8), не прибегая к оператору W.

Пусть диффеоморфизм $\alpha(t)$ сохраняет ориентацию Γ. Сначала предположим, что на Γ

$$A(t)=a_0^2(t)-c_0^2(t)\neq 0. \tag{9}$$

Рассмотрим операторы $K_1=a_0(t)I-c_0(t)S$, $K_2=A^{-1}(t)I$. В силу (9) оператор K_1 нетеров. Обозначим

$$\Theta_1(t)=a_0(\alpha)a_1(t)-c_0(\alpha)c_1(t),\quad \Theta_2(t)=a_0(\alpha)c_1(t)-a_1(t)c_0(\alpha).$$

Образуем композицию

$$K=K_2MK_1=I+\Theta_1(t)A^{-1}(t)B_\alpha+\Theta_2(t)A^{-1}(t)B_\alpha S+D_2,$$

D_i — здесь и ниже вполне непрерывные операторы.

Введем оператор $T=I-\Theta_1(t)A^{-1}(t)B_\alpha-\Theta_2(t)A^{-1}(t)B_\alpha S+D_3$ и рассмотрим композицию

$$K_3=KT=\{1-[\Theta_1(t)\Theta_1(\alpha)+\Theta_2(t)\Theta_2(\alpha)]A^{-1}(t)A^{-1}(\alpha)\}I-$$
$$-[\Theta_1(t)\Theta_2(\alpha)+\Theta_1(\alpha)\Theta_2(t)]A^{-1}(t)A^{-1}(\alpha)S+D_4.$$

Как показано в [1], $\operatorname{Ind} K=\operatorname{Ind} T$. Учитывая еще, что $\operatorname{Ind} K_2=0$,

$$2\operatorname{Ind} K=2(\operatorname{Ind} M+\operatorname{Ind} K_1)=\operatorname{Ind} K_3=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\{\arg\det[M_2(t,-1)M_2^{-1}(t,1)]\}_\Gamma+2\operatorname{Ind} K_1,$$

приходим к формуле (2).

Если неравенство (9) не выполняется, то, подбирая функцию $\varepsilon(t)$ с достаточно малой нормой и такую, что $[a_0(t)+\varepsilon(t)]^2-c_0^2(t)\neq 0$, а затем применяя теорему Ф. В. Аткинсона об устойчивости индекса нетерова оператора [8], вновь придем к формуле (2).

Формулу (8) также можно вывести по указанной выше схеме. Более того, рассуждения упрощаются в связи с тем, что здесь можно обойтись без оператора T. В самом деле, имеет место соотношение

$$(KS)^2=K_4+D_5, \tag{10}$$

где K обозначает то же самое, что и выше, а $K_4 = \widetilde{a}(t)I + \widetilde{c}(t)S$ — оператор с коэффициентами $\widetilde{a}(t)$, $\widetilde{c}(t)$, выражающимися через заданные функции. Из соотношения (10) сразу приходим к формуле (8).

5. Утверждение основной теоремы о необходимом и достаточном условии нетеровости допускает обобщение: можно легко доказать, что условие (7) необходимо и достаточно для того, чтобы оператор M был $\Phi_+(\Phi_-)$-оператором в $L_p(\Gamma)$, $\infty > p > 1$. Все результаты этой статьи без существенных изменений переносятся на операторы M с матричными коэффициентами, рассматриваемые на контуре Γ, состоящем из конечного числа простых замкнутых кривых Ляпунова Γ_k, причем диффеоморфизм $\alpha(t)$ отображает каждую кривую Γ_k на себя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. С. Литвинчук, Теория Нетера системы сингулярных интегральных уравнений со сдвигом Карлемана и комплексно сопряженными неизвестными, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 31, № 3, 1967 (исправления к работе «Теория Нетера системы сингулярных интегральных уравнений со сдвигом Карлемана и комплексно сопряженными неизвестными», т. 32, № 6, 1968).
2. С. Г. Михлин, Сингулярные интегральные уравнения, УМН, т. 3, вып. 3 (25), 1948.
3. И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, Об алгебре, порожденной одномерными сингулярными интегральными операторами с кусочно-непрерывными коэффициентами, Функциональный анализ и его приложения, т. 4, вып. 3, 1970.
4. К. Куратовский, Топология, т. I, «Мир», М., 1966.
5. Г. С. Литвинчук, Э. Г. Хасабов, Об индексе обобщенной краевой задачи Гильберта, УМН, т. 20, вып. 2(126), 1965.
6. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, «Наука», М., 1968.
7. И. Ц. Гохберг, Об одном применении теории нормированных колец к сингулярным интегральным уравнениям, УМН, т. 7, вып. 2, 1952.
8. Ф. В. Аткинсон, Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах, Матем. сб., т. 27(70), вып. 1, 1951.

Поступила 22.II 1972 г.

Одесский государственный университет