УДК 517.94

Об условиях существования замкнутых решений линейного неоднородного дифференциального уравнения с полиномиальными коэффициентами

Ю. И. Сикорский, Н. И. Терещенко

В одной из своих последних работ К. Я. Латышева [1] полностью решила вопрос о необходимых и достаточных условиях существования замкнутых решений однородного уравнения с полиномиальными коэффициентами, что явилось обобщением известных результатов для уравнений с постоянными коэффициентами. Естественно попытаться решить аналогичную задачу для неоднородных уравнений.

Будем рассматривать уравнение целого ранга $p=k+1\geqslant 0$ [2]

$$Ly = e^{P(x)}(\lambda, \lambda - q), \tag{1}$$

в котором

$$Ly = \sum_{i=0}^{n} P_i(x)\frac{d^{n-i}y}{dx^{n-i}}, \qquad P_i(x) = x^{k_i}\sum_{j=0}^{\pi_i} p_{ij}x^{-j},$$
$$P(x) = \sum_{s=1}^{p}\frac{\gamma_{p-s}x^s}{s}, \quad (\lambda, \lambda - q) = x^{\lambda}(\alpha_0 + \alpha_1 x^{-1} + \ldots + \alpha_q x^{-q}). \tag{2}$$

Пусть в окрестности $x=\infty$ известна фундаментальная система решений соответствующего (1), (2) однородного уравнения [2]:

$$y_i = e^{Q_i(x)} x^{r_i} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} x^{-j}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Иногда ряды справа в (3) могут обрываться [1].

Цель данной работы — установить необходимые и достаточные условия существования замкнутого частного решения уравнения (1), (2).

Следуя К. Я. Латышевой [1], выражение вида

$$e^{N(x)} \frac{(\xi, \xi - m)}{(\zeta, \zeta - l)} \tag{4}$$

будем называть замкнутым. От уравнения (1), (2) заменой

$$y = e^{P(x)} u \tag{5}$$

переходим к неоднородному уравнению

$$\hat{L} u = (\lambda, \lambda - q), \tag{6}$$

где

$$\hat{L} u \equiv \sum_{i=0}^{n} R_i(x) \frac{d^{n-i} u}{dx^{n-i}}, \qquad R_i(x) = x^{ki} \sum_{j=0}^{\beta_i} b_{ij} x^{-j}. \tag{7}$$

Предположим, что частное решение неоднородного уравнения (6), (7) не имеет полюсов на конечном расстоянии. Такое предположение не ограничивает общности рассуждений, так как все полюсы могут быть найдены из самого уравнения.

Действительно, все полюсы, входящие в решения соответствующего 6), (7) однородного уравнения, подсчитываются так: в каждой особой точке уравнения строится определяющее уравнение и выделяются из его корней отрицательные; если такие корни есть, то это означает, что решение имеет в данной точке полюс, порядок которого равен величине корня.

Проделав то же самое с однородным уравнением $(n+1)$-го порядка, построенным [3] по уравнениям (6), (7), найдем все полюсы его решений. Следовательно, станут известны все полюсы частного решения уравнения (6), (7). Преобразование Фукса этого уравнения позволит утверждать, что частное решение нового уравнения не имеет конечных полюсов.

Из сказанного ясно, что для установления необходимых и достаточных условий замкнутости частного решения уравнения (1), (2) следует сформулировать условия существования частного решения уравнения (6), (7) в виде

$$u = (r, r - \mu). \tag{8}$$

В общем случае решение этого уравнения — бесконечный ряд

$$u = x^r \sum_{j=0}^{\infty} C_j x^{-j}. \tag{9}$$

Нужно указать условия, когда этот ряд оборвется или бесконечная его часть даст частное решение соответствующего (6), (7) однородного уравнения.

Пусть характеристическая функция [1] уравнения (6), (7) по убывающим степеням независимого переменного

$$X(x, r) = x^{r+kn} \{ b_{n0} + b_{n1} x^{-1} + \ldots + b_{nk} x^{-k} +$$

$$+\varphi_{k+1}(r)\,x^{-(k+1)}+\ldots+\varphi_\nu(r)\,x^{-\nu}\},\tag{10}$$

где $\nu+1$ — размах коэффициентов.

Известно [2], что

$$b_{n0}=b_{n0}(\gamma_0),$$

$$b_{n1}=b_{n1}(\gamma_0,\gamma_1),$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$b_{nk}=b_{nk}(\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_k).$$

Уравнение $b_{n0}=0$ называется характеристическим, а уравнение $b_{ni}=0$ $(i=1,2,\ldots,k)$ называется i-м вспомогательным характеристическим. Кроме того, $b_{n0}(\gamma_0)\neq 0$, если γ_0 не совпадает ни с одним из коэффициентов при p-й степени x в полиномах $Q_i(x)$ $(i=1,\ldots,\bar{n})$ из (3). Аналогично, $b_{n1}(\gamma_0,\gamma_1)\neq 0$, если либо γ_0 такое же, либо γ_1 не совпадает ни с одним из коэффициентов при $(p-1)$-й степени x в полиномах $Q_i(x)$ и т. д.

Ограничимся случаем $q\leqslant\nu$, поскольку случай $q>\nu$ не имеет существенных отличий.

Подставим (9) в (6), (7) и учтем (10). В результате получим рекуррентную систему уравнений относительно неизвестных $C_0, C_1, \ldots, r$:

$$
\begin{aligned}
&C_0b_{n0}=\alpha_0,\\
&C_1b_{n0}+C_0b_{n1}=\alpha_1,\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&C_kb_{n0}+\ldots+C_0b_{nk}=\alpha_k,\\
&C_{k+1}b_{n0}+\ldots+C_1b_{nk}+C_0\varphi_{k+1}(r)=\alpha_{k+1},\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&C_qb_{n0}+\ldots+C_{q-k}b_{nk}+C_{q-k-1}\varphi_{k+1}(r-q+k+1)+\ldots+C_0\varphi_q(r)=\alpha_q,\\
&C_{q+1}b_{n0}+\ldots+C_{q-k+1}b_{nk}+C_{q-k}\varphi_{k+1}(r-q+k)+\ldots+C_0\varphi_{q+1}(r)=0,\\
&\cdot\ \cdot\\
&C_\mu b_{n0}+\ldots+C_{\mu-k}b_{nk}+C_{\mu-k-1}\varphi_{k+1}(r-\mu+k+1)+\ldots+C_0\varphi_\mu(r)=0,\\
&\cdot\ \cdot\\
&C_\nu b_{n0}+\ldots+C_{\nu-k}b_{nk}+C_{\nu-k-1}\varphi_{k+1}(r-\nu+k+1)+\ldots+C_0\varphi_\nu(r)=0,\\
&C_{\nu+1}b_{n0}+\ldots+C_{\nu-k+1}b_{nk}+C_{\nu-k}\varphi_{k+1}(r-\nu+k)+\ldots+C_1\varphi_\nu(r-1)=0,\\
&\cdot\ \cdot\\
&C_{\nu+\mu}b_{n0}+\ldots+C_{\nu+\mu-k}b_{nk}+C_{\nu+\mu-k-1}\varphi_{k+1}(r-\nu-\mu+k+1)+\ldots\\
&\ldots+C_\mu\varphi_\nu(r-\mu)=0,\\
&\cdot\ \cdot
\end{aligned}
\tag{11}
$$

где $r=\lambda-kn$,

$$\varphi_{k+i}(r)=\begin{cases}b_{n,k+i}+rb_{n-1,i-1}, & i=1,\ldots,k,\\ b_{n,k+i}+rb_{n-1,i-1}+r(r-1)\,b_{n-2,i-(k+1)}, & i=k+1,\ldots,2k+1,\\ \cdot\end{cases}$$

Ясно, что необходимым и достаточным условием существования частного решения уравнения (6), (7) в виде (8) является совместность следующей конечной алгебраической системы:

$$
\begin{aligned}
&C_0 b_{n0} = \alpha_0,\\
&C_1 b_{n0} + C_0 b_{n1} = \alpha_1,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&C_k b_{n0} + \ldots + C_0 b_{nk} = \alpha_k,\\
&C_{k+1} b_{n0} + \ldots + C_1 b_{nk} + C_0 \varphi_{k+1}(r) = \alpha_{k+1},\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&C_q b_{n0} + \ldots + C_{q-k} b_{nk} + C_{q-k-1}\varphi_{k+1}(r-q+k+1) + \ldots + C_0\varphi_q(r) = \alpha_q,\\
&C_{q+1} b_{n0} + \ldots + C_{q-k+1} b_{nk} + C_{q-k}\varphi_{k+1}(r-q+k) + \ldots + C_0\varphi_{q+1}(r) = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots \qquad (12)\\
&C_\mu b_{n0} + \ldots + C_{\mu-k} b_{nk} + C_{\mu-k-1}\varphi_{k+1}(r-\mu+k+1) + \ldots + C_0\varphi_\mu(r) = 0,\\
&C_\mu b_{n1} + \ldots + C_{\mu-k+1} b_{nk} + C_{\mu-k}\varphi_{k+1}(r-\mu+k) + \ldots + C_0\varphi_{\mu+1}(r) = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&C_\mu b_{n,\nu-\mu} + \ldots + C_{\nu-k} b_{nk} + C_{\nu-k-1}\varphi_{k+1}(r-\nu+k+1) + \ldots + C_0\varphi_\nu(r) = 0,\\
&C_\mu b_{n,\nu-\mu+1} + \ldots + C_{\nu-k+1} b_{nk} + C_{\nu-k}\varphi_{k+1}(r-\nu+k) + \ldots + C_1\varphi_\nu(r-1) = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&C_\mu\varphi_{\nu-1}(r-\mu) + C_{\mu-1}\varphi_\nu(r-\mu+1) = 0,\\
&C_\mu\varphi_\nu(r-\mu) = 0
\end{aligned}
$$

при $r = \lambda - kn$.

Однородная подсистема уравнений, состоящая из последних $\mu + 1$ уравнений системы (12), показывает, что необходимым условием существования частного решения в виде (8) ($\mu > q$) является обращение в нуль $\varphi_\nu(r - m)$ хотя бы для одного $m = 0, 1, \ldots, \mu$ при $r = \lambda - kn$, так как в противном случае из подсистемы получим: $C_0 = C_1 = \ldots = C_\mu = 0$, что невозможно.

Необходимые и достаточные условия совместности системы (12) дает теорема Кронекера — Капелли.

Может случиться, что несколько старших коэффициентов полинома $p(x)$ совпадают с соответствующими коэффициентами в одном из полиномов $Q_i(x)$. Пусть это коэффициенты $\gamma_0, \gamma_1, \ldots \gamma_{p-s}$, $(1 < s \leqslant p)$. Тогда системы (11) и (12) изменятся. Они будут начинаться с $b_{n,p-s+1}$ вместо b_{n0} и $r = \lambda - kn + p - s + 1$. Если же $P(x) \equiv Q_i(x)$ для некоторого $i = 1, 2, \ldots, \bar{n}$, то системы (11) и (12) будут начинаться с $\varphi_{k+1}(r)$, а $r = \lambda - kn + p$. В этом случае появится еще одно необходимое условие: $\varphi_{k+1}(r) \neq 0$ при $r = \lambda - kn + p$.

Итак, доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть старший коэффициент полинома $P(x)$ γ_0 не является корнем характеристического уравнения. Тогда для того, чтобы частное решение уравнения* (6), (7) *имело вид* (8) ($\mu > q$), *необходимо, чтобы* $\exists\ m = 0, 1, \ldots, \mu$ *такое, что* $\varphi_\nu(r - m) \equiv 0$ *при* $r = \lambda - kn$.

Замечание. Последнее условие означает, что среди показателей решений в окрестности $x = 0$ соответствующего (6), (7) однородного уравнения должен быть показатель, отличающийся от λ на целое число.

Теорема 2. *Если γ_0 не является корнем характеристического уравнения, то необходимым и достаточным условием существования част-*

ного решения уравнения (6), (7) *в виде* (8) *есть равенство рангов основной и расширенной матриц системы* (12).

Теорема 3. *Если* $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{p-s}$ $(1 < s \leqslant p)$ *совпадают с корнями характеристического уравнения и вспомогательных характеристических уравнений, то необходимым и достаточным условием существования частного решения уравнения* (6), (7) *в виде* (8), *где* $r = \lambda - kn + p - s + 1$, *является равенство рангов основной и расширенной матриц измененной системы* (12).

Теорема 4. *Пусть* $P(x) \equiv Q_i(x)$ *для некоторого* $i = \overline{1, 2, \ldots, n}$. *Тогда необходимыми условиями существования решения вида* (8) *являются следующие*:

1) $\exists\ m = 0, 1, \ldots, \mu, \varphi_\nu(r - m) \equiv 0,$ *при* $r = \lambda - kn + p\cdot$

2) $\varphi_{k+1}(r) \neq 0$ *при* $r = \lambda - kn + p$.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$x^2y'' + (2x^2 + x)\,y' + (2x^2 + x - \alpha^2)\,y = e^x\,(\beta x^4 + x^2 + 1).$$

Подставим $y = e^x u$. Тогда уравнение примет вид

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right)u = x^2\,(\beta + x^{-2} + x^{-4}).$$

Получим неоднородное уравнение Бесселя, частное решение которого — линейная комбинация функций Ломмеля [4]: $u = \beta S_{3,\alpha} + S_{1,\alpha} + S_{-1,\alpha}$. При произвольном β это бесконечный ряд. Укажем, каким должно быть β, чтобы частное решение этого уравнения имело вид $y = x^r(C_0 + C_1x^{-1} + \ldots + C_\mu x^{-\mu})$. В данном случае $k = 0$, $p = 1, n = 2$, $\lambda = 2$, $q=4$; характеристическая функция $X(x,r)=x^r\{1+(r^2-\alpha^2)x^{-2}\}$, $\nu=2$, $\varphi_0(r)\equiv 1$, $\varphi_1(r) \equiv 0$, $\varphi_2(r) = r^2 - \alpha^2$. Если α^2 не целое, то необходимое условие не выполняется при $\mu > q$. Это означает, что если и есть решение в виде $(r, r - \mu)$, то $\mu \leqslant 4$. Необходимое и достаточное условие существования такого решения дает теорема 2.

Рекуррентная система

$$\begin{aligned}
&C_0 = \beta,\\
&C_1 = 0,\\
&C_2 + C_0(4 - \alpha^2) = 1,\\
&C_3 + C_1(1 - \alpha^2) = 0\\
&C_4 + C_2(-\alpha^2) = 1,\\
&\qquad C_3(1 - \alpha^2) = 0,\\
&\qquad C_4(4 - \alpha^2) = 0
\end{aligned}$$

совместна тогда и только тогда, когда $\beta = \dfrac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2(4 - \alpha^2)}$. В таком случае найдем: $C_0 = \beta$, $C_1 = 0$, $C_2 = -\dfrac{1}{\alpha^2}$, $C_3 = 0$, $C_4 = 0$. Следовательно, частное решение исходного уравнения

$$y = e^x\frac{x^2}{\alpha^2}\left(\frac{\alpha^2 + 1}{4 - \alpha^2} - x^{-2}\right), \qquad \text{если} \quad \beta = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2(4 - \alpha^2)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Я. Латышева, Решения в конечной форме однородных линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами, Наукові записки КДУ, Матем. зб., № 9, 1957.
2. К. Я. Латышева, Н. И. Терещенко, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений и их приложения, К., 1970.
3. Ю. И. Сикорский, Н. И. Терещенко, О построении частных решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений в окрестности иррегулярной особой точки, УМЖ, т. 23, № 6, 1971.
4. A. W. Babister, Transcendental functions satisfying nonhomogeneous linear differential equations, New York—London, 1967.
5. К. Я. Латышева, Рациональные частные решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами и полиномиальной правой частью, Наукові записки КДУ, Матем. зб., № 5, 1951.

Поступила 16.XII 1971 г.
Киевский государственный университет