УДК 517.946

Об асимптотическом решении для линейной системы гиперболического типа с запаздывающими аргументами

Н. А. Сотниченко, С. Ф. Фещенко

1. Рассмотрим систему вида

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = A_1(\tau, x, \varepsilon)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \varepsilon A_2(\tau, x, \varepsilon)\, u(t, x) +$$

$$+ \varepsilon A_3(\tau, x, \varepsilon)\, u(\sigma, \eta) + \varepsilon A_4(\tau, x, \varepsilon)\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \varepsilon A_5(\tau, x, \varepsilon)\frac{\partial u(\sigma, \eta)}{\partial t} + \tag{1}$$

$$+ \varepsilon A_6(\tau, x, \varepsilon)\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} + g(\tau, x, \varepsilon)\exp i\theta(t, \varepsilon)$$

с начальными условиями

$$u(t, x) = \varphi(t, x), \quad u'_t(t, x) = \psi(t,x) \text{ для } -t_0 \leqslant t \leqslant 0 \tag{2}$$

и граничными условиями

$$u(t, x)|_{x=0} = u(t, x)|_{x=l} = 0, \qquad (3) \qquad\qquad u(t, x) \equiv 0 \text{ для } \eta < 0, \tag{4}$$

где $0 \leqslant \tau = \varepsilon t \leqslant L$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ — малый параметр, $0 \leqslant x \leqslant l$; $d\theta/dt = k(\tau)$ — медленно меняющаяся функция, $\sigma = t - \Delta(\tau)$, $0 \leqslant \Delta(\tau) \leqslant t_0$ при $0 \leqslant \tau \leqslant L$; $L > 0$ — фиксированное число; $\eta = x - \mu(x)$, $u(t, x)$, $g(\tau, x, \varepsilon)$ — n-мерные векторы; $A_k(\tau, x, \varepsilon)$ $(k = 1, \ldots, 6)$ — матрицы порядка $n \times n$, $i = \sqrt{-1}$.

Предполагается, что выполняются условия 1^0 — 4^0 из [1] с несущественными изменениями. В этом случае (см. [1]) задача (1)—(3) сводится к задаче Коши для следующей системы с запаздывающим аргументом:

$$\frac{dq_m(t, \varepsilon)}{dt} = H_m(\tau) q_m(t, \varepsilon) + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} H_{mk}(\tau, \varepsilon)\, q_k(t, \varepsilon) +$$

$$+ \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} G_{mk}(\tau, \varepsilon)\, q_k(\sigma, \varepsilon) + P_m(\tau, \varepsilon)\exp i\theta(t, \varepsilon) \tag{5}$$

с начальными условиями

$$q_m(t, \varepsilon) = \Phi_m(t) \text{ при } -t_0 \leqslant t \leqslant 0, \tag{6}$$

где q_m, P_m, Φ_m — векторы размерности $\nu = 2n$, а H_m, H_{mk}, G_{mk} — квадратные матрицы порядка $\nu = 2n$.

Построение асимптотических решений для уравнений типа (1) рассматривалось в работах [2—4]. В случае конечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами и запаздыванием аргумента построение асимптотических решений дано в [5, 6].

Построение решения для системы (5) вызывает определенные трудности, которые проявляются даже в том, что неизвестная вектор-функция $q(t, \varepsilon)$ входит в систему (5) под двумя индексами m и k. Поэтому в работе [1] рассматривался случай построения частных асимптотических решений. В данной статье обходим эти трудности, записав систему (5) в бесконечно векторно-матричной форме, и строим решение более общего характера, чем частное.

Рассмотрим характеристическое уравнение системы (5):

$$\det \| H_m(\tau) - \lambda_m E \| = 0, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

(E — единичная матрица). В данной работе указывается алгоритм построения асимптотического решения для системы (5) в том случае, когда кратному ненулевому корню уравнения (7) соответствуют простые элементарные делители. При этом применяется методика, разработанная в работе [6].

Не умаляя общности, будем считать, что характеристическое уравнение (7) имеет один корень кратности ν. Если же уравнение (7) имеет $k < \nu$ различных корней, то, применяя метод из [7—9], систему (5) можно расщепить на k систем, характеристическое уравнение каждой из которых имеет один корень.

Итак, предположим, что уравнение (7) имеет один ненулевой корень $\lambda_m^0(\tau)$ кратности ν, которому соответствуют простые элементарные делители. Тогда существует такая неособая матрица $T_m(\tau)$ для матрицы $H_m(\tau)$, что

$$W_m(\tau) = T_m^{-1}(\tau) H_m(\tau) T_m(\tau) = \begin{Vmatrix} \lambda_m^{(0)}(\tau) & 0 \ldots 0 \\ 0 & \lambda_m^{(0)}(\tau) \ldots 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \ldots \lambda_m^{(0)}(\tau) \end{Vmatrix} (m = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

При построении асимптотического решения системы (5) будем различать два случая [10]:

1) «резонанса»: функция $k(\tau) = d\theta/dt$ при некоторых значениях $\tau \in [0, L]$ становится равной одному из корней уравнения (7), например

$$ik(\tau) = \lambda_1^{(0)}(\tau), \tag{9}$$

однако для всех $\tau \, (\tau \in [0, L])$

$$ik(\tau) \neq \lambda_m^{(0)}(\tau), \quad m = 2, 3, \ldots; \tag{10}$$

2) «нерезонанса»: при любом $\tau \in [0, L]$

$$ik(\tau) \neq \lambda_m^{(0)}(\tau), \quad m = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Ради удобства дальнейшего изложения запишем систему (5) в виде

$$\frac{dq(t, \varepsilon)}{dt} = H(\tau, \varepsilon) q(t, \varepsilon) + \varepsilon G(\tau, \varepsilon) q(\sigma, \varepsilon) + P(\tau, \varepsilon) \exp i\theta(t, \varepsilon), \tag{12}$$

где q, P — бесконечномерные векторы, H, G — бесконечные матрицы.

2. Рассмотрим теперь построение асимптотического решения для системы (12) в случае 1). В этом случае справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если матрицы $H^{(s)}(\tau)$, $G^{(s)}(\tau)$, векторы $P^{(s)}(\tau)$ ($s = 0, 1, \ldots$) и функции $k(\tau)$, $\Delta(\tau)$ неограниченно дифференцируемы по $\tau \in [0, L]$, то система* (12) *в «резонансном» случае имеет формальное решение вида*

$$q(t, \varepsilon) = [U_1(\tau, \varepsilon) h_1(t, \varepsilon) + \xi(\tau, \varepsilon)] \exp i\theta(t, \varepsilon) + \sum_{m=2}^{\infty} U_m(\tau, \varepsilon) h_m(t, \varepsilon), \quad (13)$$

где $U_m(\tau, \varepsilon)$ — прямоугольные матрицы размеров $(\nu \times \infty)$, $\xi(\tau, \varepsilon)$ — бесконечномерный вектор, а $h_m(t, \varepsilon)$ — векторы размерности ν ($m = 1, 2, \ldots$), удовлетворяющие системам дифференциальных уравнений

$$\frac{dh_1(t, \varepsilon)}{dt} = [\Lambda_1(\tau, \varepsilon) - ik(\tau) E] h_1(t, \varepsilon) + z(\tau, \varepsilon), \quad (14)$$

$$\frac{dh_m(t, \varepsilon)}{dt} = \Lambda_m(\tau, \varepsilon) h_m(t, \varepsilon), \quad m = 2, 3, \ldots, \quad (15)$$

в которых $\Lambda_m(\tau, \varepsilon)$ — матрицы порядка $\nu \times \nu$, а $z(\tau, \varepsilon)$ — ν-мерный вектор, причем имеют место формальные разложения

$$U_m(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s U_m^{(s)}(\tau), \quad \Lambda_m(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \Lambda_m(\tau),$$
$$\xi(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \xi^{(s)}(\tau), \quad z(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s z^{(s)}(\tau). \quad (16)$$

Доказательство. Для доказательства подставим вектор $q(t, \varepsilon)$, заданный соотношениями (13) — (15), в систему (12), получим тождество. Приравнивая в данном тождестве члены при векторах $h_m(t, \varepsilon)$ и свободные члены, придем к соотношениям:

$$U_m(\tau, \varepsilon) \Lambda_m(\tau, \varepsilon) - H(\tau, \varepsilon) U_m(\tau, \varepsilon) = -\varepsilon U_m'(\tau, \varepsilon) + \\ + \varepsilon G(\tau, \varepsilon) U_m(\beta, \varepsilon) \exp \int_t^{\sigma} \Lambda_m(\tau, \varepsilon) dt, \quad (17)$$

$$[H(\tau, \varepsilon) - ik(\tau) E] \xi(\tau, \varepsilon) = \varepsilon \xi'(\tau, \varepsilon) - P(\tau, \varepsilon) - \\ - \varepsilon G(\tau, \varepsilon) \xi(\beta, \varepsilon) \exp \int_t^{\sigma} ik(\tau) dt + U_1(\tau, \varepsilon) z(\tau, \varepsilon) - \\ - \varepsilon G(\tau, \varepsilon) U_1(\beta, \varepsilon) \exp \int_t^{\sigma} \Lambda_1(\tau, \varepsilon) dt \int_t^{\sigma} \exp\left(-\int_t^{s} (\Lambda_1 - ikE) dt\right) z(\tau, \varepsilon) ds \\ \left(\beta = \varepsilon\sigma, \quad ' = \frac{d}{d\tau}, \quad m = 1, 2, \ldots\right). \quad (18)$$

Обозначая через $Q_m(\tau, \varepsilon)$, $R(\tau, \varepsilon)$ и $V(\tau, \varepsilon)$ соответственно формальные разложения по параметру ε выражения

$$U_m(\beta, \varepsilon) \exp \int_t^{\sigma} \Lambda_m(\tau, \varepsilon) dt, \quad \xi(\beta, \varepsilon) \exp \int_t^{\sigma} ik(\tau) dt,$$

$$U_1(\beta,\varepsilon)\exp\int_t^\sigma \Lambda_1(\tau,\varepsilon)\,dt\int_t^\sigma \exp\left(-\int_t^s (\Lambda_1 - ikE)\,dt\right) z(\tau,\varepsilon)\,ds,$$

соотношения (17), (18) можно записать в виде

$$U_m(\tau,\varepsilon)\,\Lambda_m(\tau,\varepsilon) - H(\tau,\varepsilon)\,U_m(\tau,\varepsilon) = \varepsilon G(\tau,\varepsilon)\,Q_m(\tau,\varepsilon) - \varepsilon U'_m(\tau,\varepsilon), \quad (19)$$

$$[H(\tau,\varepsilon) - ik(\tau)E]\,\xi(\tau,\varepsilon) = \varepsilon\xi'(\tau,\varepsilon) - P(\tau,\varepsilon) -$$
$$- \varepsilon G(\tau,\varepsilon)\,R(\tau,\varepsilon) + U_1(\tau,\varepsilon)\,z(\tau,\varepsilon) - \varepsilon G(\tau,\varepsilon)\,V(\tau,\varepsilon). \quad (20)$$

Отделяя в (19) коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε, получим уравнения

$$U_m^{(0)}(\tau)\,\Lambda_m^{(0)}(\tau) - H^{(0)}(\tau)\,U_m^{(0)}(\tau) = 0, \quad (21)$$

$$U_m^{(s)}(\tau)\,\Lambda_m^{(0)}(\tau) - H^{(0)}(\tau)\,U_m^{(s)}(\tau) = B_m^{(s)}(\tau) - U_m^{(0)}(\tau)\,\Lambda_m^{(s)}(\tau)\ (m, s = 1, 2, \ldots), \quad (22)$$

где

$$B_m^{(s)}(\tau) = \sum_{j=0}^{s-1} G^{(j)}(\tau)\,Q_m^{(s-j-1)}(\tau) - U_m'^{(s-1)}(\tau) - \sum_{j=1}^{s} U_m^{(j)}(\tau)\,\Lambda_m^{(s-j)}(\tau). \quad (23)$$

Покажем разрешимость уравнений (21), (22). Для этого введем в рассмотрение матрицы

$$M_m^{(s)}(\tau) = T^{-1}(\tau)\,U_m^{(s)}(\tau), \quad \widetilde{B}_m^{(s+1)}(\tau) = T^{-1}(\tau)\,B_m^{(s+1)}(\tau). \quad (24)$$

Здесь $T(\tau)$ — матрица, преобразующая матрицу $H^{(0)}(\tau)$ к квазидиагональному виду, т. е. $T^{-1}(\tau)\,H^{(0)}(\tau)\,T(\tau) = W(\tau)$. Теперь уравнения (21), (22) можно записать так:

$$M_m^{(0)}(\tau)\,\Lambda_m^{(0)}(\tau) - W(\tau)\,M_m^{(0)}(\tau) = 0, \quad (25)$$

$$M_m^{(s)}(\tau)\,\Lambda_m^{(0)}(\tau) - W(\tau)\,M_m^{(s)}(\tau) = \widetilde{B}_m^{(s)}(\tau) - M_m^{(0)}(\tau)\,\Lambda_m^{(s)}(\tau)\ (m, s = 1, 2, \ldots). \quad (26)$$

Так как матрица $W(\tau)$ имеет квазидиагональный вид, то каждое из уравнений (25), (26) распадается на α уравнений вида

$$M_{m\alpha}^{(0)}(\tau)\,\Lambda_m^{(0)}(\tau) - W_\alpha(\tau)\,M_{m\alpha}^{(0)}(\tau) = 0, \quad (27)$$

$$M_{m\alpha}^{(s)}(\tau)\,\Lambda_m^{(0)}(\tau) - W_\alpha(\tau)\,M_{m\alpha}^{(s)}(\tau) = \widetilde{B}_{m\alpha}^{(s)}(\tau) - M_{m\alpha}^{(0)}(\tau)\,\Lambda_m^{(s)}(\tau)$$
$$(m, s, \alpha = 1, 2, \ldots). \quad (28)$$

Тогда, положив

$$M_{mm}^{(0)}(\tau) = E, \quad m = 1, 2, \ldots, \quad (29)$$

получаем

$$\Lambda_m^{(0)}(\tau) = W_m(\tau),\ \Lambda_m^{(s)}(\tau) = \widetilde{B}_{mm}^{(s)}(\tau), \quad s = 1, 2, \ldots,$$
$$M_{m\alpha}^{(0)}(\tau) = 0\ \ (m \neq \alpha;\ m, \alpha = 1, 2, \ldots). \quad (30)$$

Что касается матриц $M_{m\alpha}^{(s)}(\tau)$ $(m \neq \alpha;\ m, \alpha = 1, 2, \ldots)$, то они однозначно определяются из матричных уравнений

$$M_{m\alpha}^{(s)}(\tau)\,W_m(\tau) - W_\alpha(\tau)\,M_{m\alpha}^{(s)}(\tau) = \widetilde{B}_{m\alpha}^{(s)}(\tau)\ \ (m \neq \alpha;\ m, s, \alpha = 1, 2, \ldots). \quad (31)$$

Таким образом, уравнения (25), (26), а значит и уравнения (21), (22) в предположении (29) однозначно разрешимы.

Рассмотрим теперь соотношение (20). Приравнивая в нем коэффициенты при ε^s $(s = 0, 1, \ldots)$, приходим к уравнениям

$$[H^{(0)}(\tau) - ik(\tau)E]\,\xi^{(s)}(\tau) = r^{(s)}(\tau) + U_1^{(0)}(\tau)\,z^{(s)}(\tau), \quad (32)$$

где

$$r^{(s)}(\tau)=\xi'^{(s-1)}(\tau)-P^{(s)}(\tau)-\sum_{j=0}^{s-1}G^{(j)}(\tau)R^{(s-j-1)}(\tau)+$$

$$+\sum_{j=1}^{s}U_1^{(j)}z^{(s-j)}(\tau)-\sum_{j=0}^{s-1}G^{(j)}V^{(s-j-1)}-\sum_{j=1}^{s}H^{(j)}\xi^{(s-j)}\quad (s=0,1,\ldots). \qquad (33)$$

Умножая обе части уравнения (32) слева на матрицу $T^{-1}(\tau)$, получаем

$$[W(\tau)-ik(\tau)E]\,y^{(s)}(\tau)=\tilde{r}^{(s)}(\tau)+M_1^{(0)}(\tau)z^{(s)}(\tau) \qquad (34)$$

или

$$[W_\alpha(\tau)-ik(\tau)E]\,y_\alpha^{(s)}(\tau)=\tilde{r}_\alpha^{(s)}(\tau)+M_{1\alpha}^{(0)}(\tau)z^{(s)}(\tau)\ (\alpha=1,2,\ldots;\ s=0,1\ldots), \qquad (35)$$

где

$$y^{(s)}(\tau)=T^{-1}(\tau)\xi^{(s)}(\tau),\quad \tilde{r}^{(s)}(\tau)=T^{-1}(\tau)r^{(s)}(\tau). \qquad (36)$$

Отсюда находим

$$y_\alpha^{(s)}(\tau)=[W_\alpha(\tau)-ik(\tau)E]^{-1}\tilde{r}_\alpha^{(s)}(\tau)\quad (\alpha=2,3,\ldots;\ s=0,1,\ldots). \qquad (37)$$

При $\alpha=1$ уравнение (35) принимает вид

$$[W_1(\tau)-ik(\tau)E]\,y_1^{(s)}(\tau)=\tilde{r}_1^{(s)}(\tau)+z^{(s)}(\tau). \qquad (38)$$

Ввиду того, что при некоторых $\tau\in[0,\ L]$ в «резонансном» случае $i\kappa(\tau)$ становится равной корню $\lambda_1^{(0)}(\tau)$, то определитель системы (38) при этих значениях τ равен нулю. Поэтому для разрешимости системы (38) необходимо и достаточно, чтобы вектор, стоящий в правой части этой системы, был ортогонален к вектор-решению соответствующей однородной союзной системы. Это условие будет заведомо выполняться, если принять

$$\tilde{r}_1^{(s)}(\tau)+z^{(s)}(\tau)=0,\quad s=0,1,\ldots,$$

т. е.

$$z^{(s)}(\tau)=-\tilde{r}_1^{(s)}(\tau),\quad s=0,1,\ldots \qquad (39)$$

Тогда вектор $y_1^{(s)}(\tau)$ можно положить равным нулевому вектору

$$y_1^{(s)}(\tau)=0,\quad s=0,1,\ldots \qquad (40)$$

Итак, доказав разрешимость уравнений (21), (22), доказали теорему 1.

3. Для «нерезонансного» случая имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Если выполняются условия теоремы* 1, *то система* (12) *в «нерезонансном» случае имеет формальное решение вида*

$$q(t,\varepsilon)=\sum_{m=1}^{\infty}U_m(\tau,\varepsilon)h_m(t,\varepsilon)+R(\tau,\varepsilon)\exp i\theta(t,\varepsilon), \qquad (41)$$

$$\frac{dh_m(t,\varepsilon)}{dt}=\Lambda_m(\tau,\varepsilon)h_m(t,\varepsilon), \qquad (42)$$

где $U_m(\tau,\varepsilon)$, $\Lambda_m(\tau,\varepsilon)$ $(m=1,2,\ldots)$ — *те же, что и в теореме* 1, *а* $R(\tau,\varepsilon)$ — *бесконечномерный вектор, допускающий формальное разложение*

$$R(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^sR^{(s)}(\tau). \qquad (43)$$

Доказательство. Для доказательства данной теоремы нужно надлежащим образом определить коэффициенты формального ряда (43). С этой целью, подставляя (41) в систему (12), получим тождество. Приравнивая в данном тождестве члены при векторах $h_m(t, \varepsilon)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ и свободные члены, получим соотношение (17) и следующее:

$$[H(\tau, \varepsilon) - ik(\tau) E] R(\tau, \varepsilon) = \varepsilon R'(\tau, \varepsilon) - P(\tau, \varepsilon) - \varepsilon G(\tau, \varepsilon) R(\beta, \varepsilon) \exp i \int_t^\sigma k(\tau)\, dt. \tag{44}$$

Отделяя здесь члены при ε^s $(s = 0, 1, \ldots)$, имеем

$$[H^{(0)}(\tau) - ik(\tau) E] R^{(s)}(\tau) = Y^{(s)}(\tau), \tag{45}$$

где

$$Y^{(s)}(\tau) = R'^{(s-1)}(\tau) - P^{(s)}(\tau) - \sum_{j=0}^{s-1} G^{(j)}(\tau) N^{(s-j-1)}(\tau) -$$

$$- \sum_{j=1}^{s} H^{(s)}(\tau) R^{(s-j)}(\tau) \left(N(\tau, \varepsilon) = R(\beta, \varepsilon) \exp i \int_t^\sigma k(\tau)\, dt \right). \tag{46}$$

Так как в «нерезонансном» случае $\det \| H^{(0)}(\tau) - ik(\tau) E \| \neq 0$, то из (45) находим $R^{(s)}(\tau) = [H^{(0)}(\tau) - ik(\tau) E]^{-1} Y^{(s)}(\tau)$.

Теорема доказана. Неограниченная дифференцируемость фигурирующих в рекуррентных формулах искомых величин следует из [11].

Используя теорему 3 из [1], легко показать асимптотический характер построенных решений в смысле Крылова — Боголюбова.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Ф. Фещенко, Н. И. Шкиль, Н. А. Сотниченко, Об асимптотическом представлении решений для системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных с запаздыванием по времени, УМЖ, т. 23, № 2, 1971.
2. Я. П. Менько, С. Ф. Фещенко, Про асимптотичний розв'язок лінійного диференціального рівняння в частинних похідних з запізнюючим аргументом, Четверта конф. молодих матем. України, К., 1968.
3. В. А. Домбровский, В. И. Фодчук, Об асимптотическом представлении решений для дифференциального уравнения в частных производных с запаздыванием, Математическая физика, вып. 6, «Наукова думка», К., 1969.
4. Э. Ш. Балла, И. И. Маркуш, Об асимптотическом решении смешанной задачи для гиперболического уравнения с запаздывающими аргументами, УМЖ, т. 23, № 4, 1971.
5. Я. П. Менько, К теории асимптотического представления интегралов системы линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, содержащих параметр, Автореферат канд. дисс., К., 1966.
6. Н. И. Шкиль, О некоторых асимптотических методах в теории линейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами, Автореферат докт. дисс., К., 1968.
7. С. Ф. Фещенко, Об асимптотическом расщеплении системы линейных дифференциальных уравнений, I, УМЖ, т. 7, № 2, 1955.
8. С. Ф. Фещенко, Об асимптотическом расщеплении системы линейных дифференциальных уравнений. II, УМЖ, т. 7, № 4, 1955.
9. Н. И. Шкиль, Об асимптотическом расщеплении системы линейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами, УМЖ, т. 22, № 1, 1970.
10. С. Ф. Фещенко, Н. И. Шкиль, Л. Д. Николенко, Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений, «Наукова думка», К., 1966.
11. Ю. Л. Далецький, С. Г. Крейн, Деякі властивості операторів, що залежать від параметра, ДАН УРСР, № 6, 1950.

Поступила 19.V 1972 г.

Киевский педагогический институт,
Институт математики АН УССР