УДК 517.9

О поведении решений неоднородных дифференциальных уравнений с точкой поворота и малым параметром при производной

С. Ю. Дзядык

В целом ряде известных работ А. А. Дородницына, М. Й. Вишика и Л. А. Люстерника, А. Б. Васильевой, Р. Лангера, С. А. Ломова и др. проведены глубокие исследования решений дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных вида

$$\mu y^{(k)} + q(x)\, y = f(x), \qquad x \in [0, a],\ a > 0,$$

где $q(x)$ и $f(x)$ — некоторые достаточно гладкие функции, а также ряда более общих уравнений. Почти во всех этих работах предполагалось, что функция $q(x)$ отлична от нуля при всех $x \in [0, a]$. Случаю, когда $q(0) = 0$, $q(x) > 0$, если $x \in [0, a]$ при $k = 2$, посвящены для однородных уравнений работы [1 и 2], а для неоднородных уравнений и некоторых специальных дополнительных условий — работа [3].

В этой статье приведены без доказательства полученные результаты о поведении на сегменте $[0, a]$, $a > 0$, решений задач вида

$$\mu y' + x^m q(x)\, y = f(x), \qquad y(0) = y^0, \tag{1}$$

и

$$\mu y'' - x^m q(x)\, y = f(x),\ y(0) = y^0, \qquad y(a) = y^a, \tag{2}$$

в предположении, что μ — малый положительный параметр, а $q(x)$ и $f(x)$ — достаточно гладкие функции, и при этом

$$A_1 \leqslant q(x) \leqslant A_2, \quad |q^{(j)}(x)| \leqslant A_2, \qquad 0 < A_1 < A_2 < \infty. \tag{3}$$

Теорема 1. *При любых натуральном m и целом $i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ решение $\zeta_{i,m}(x)$ задачи*

$$\zeta' + x^m \zeta = x^i, \qquad \zeta(0) = 0 \tag{4}$$

обладает следующими свойствами:

1) *существует единственная точка $c = c(m, i)$, в которой производная $\zeta'_{i,m}(x)$ обращается в нуль, $\zeta'_{i,m}(c) = 0$, и при этом $c \in (1, 2)$;*

2) *на сегменте $[0, c]$ функция $\zeta_{i,m}(x)$ строго возрастает, а на полусегменте $[c, \infty)$ строго убывает;*

3) *в точке c функция $\zeta_{i,m}(x)$ принимает максимальное на $[0, \infty)$ значение, и при этом $\zeta_{i,m}(c) = \dfrac{1}{c^{m-i}}$;*

4) *при всех $x \in (c, \infty)$ справедливы неравенства*

$$0 < \zeta_{i,m}(x) - \frac{1}{x^{m-i}} \leqslant \frac{2(m-i)}{x^{2m+1-i}};$$

5) *при любом натуральном n имеет место асимптотическое равенство*

$$\zeta_{i,m}(x) = \frac{1}{x^{m-i}} \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_{i,m}^k}{x^{k(m+1)}} + O\left(\frac{1}{x^{(n+1)(m+1)}} \right) \right],$$

где $\alpha_{i,m}^0 = 1$, $\alpha_{i,m}^k = (m-i)(m-i+m+1) \ldots [m-i+(k-1)(m+1)]$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 1′. *При любых натуральном m и целом $i = 0, 1, \ldots, m-1$ решение $z_{i,m}(x, \mu)$ задачи*

$$\mu z' + x^m q(x) z = x^i \varphi_{i,m}(x), \qquad z(0) = 0, \tag{5}$$

где $\varphi_{i,m}(x) = \dfrac{q(x)}{[r(x)]^{m-i}}$, $r(x) = \left[(m+1) \int\limits_0^1 t^m q(tx)\, dt \right]^{\frac{1}{m+1}}$, *выражается формулой*

$$z_{i,m}(x, \mu) = \frac{1}{\mu^{\frac{m-i}{m+1}}} \zeta_{i,m}\left(\frac{xr(x)}{\mu^{\frac{1}{m+1}}} \right), \tag{6}$$

где функция $\zeta_{i,m}(t)$ является решением задачи (4).

Теорема 2. *При любых натуральном m и целом $i = 0, 1, \ldots, m-1$ решение $\zeta_{i,m}(x)$ задачи*

$$\zeta'' - x^m \zeta = x^i, \qquad \zeta(0) = \zeta(\infty) = 0: \tag{7}$$

существует и обладает следующими свойствами:

1) *функция $\zeta_{i,m}(x)$ представима в виде*

$$\zeta_{i,m}(x) = -u_1(x) \int\limits_0^x s^i u_2(s)\, ds - u_2(x) \int\limits_x^\infty s^i u_1(s)\, ds,$$

при этом

$$u_1(x) = \frac{2}{(m+2)^{\frac{1}{m+2}} \Gamma\left(\frac{1}{m+2}\right)} \sqrt{x}\, K_{\frac{1}{m+2}}\left(\frac{2}{m+2} x^{\frac{m+2}{2}} \right),$$

$$u_2(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m+2}\right)}{(m+2)^{\frac{m+1}{m+2}}} \sqrt{x}\, I_{\frac{1}{m+2}}\left(\frac{2}{m+2} x^{\frac{m+2}{2}} \right),$$

где $K_\nu(t)$, $I_\nu(t)$ — соответственно функция Макдональда и модифицированная функция Бесселя порядка ν;

2) *при $x \to \infty$ справедливо асимптотическое разложение*

$$\zeta_{i,m}(x) = -\frac{1}{x^{m-i}} \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_{i,m}^k}{x^{k(m+2)}} + O\left(\frac{1}{x^{(n+1)(m+2)}} \right) \right],$$

где $\alpha_{i,m}^0 = 1$, $\alpha_{i,m}^k = \prod\limits_{j=0}^{k-1} [m - i + j(m+2)][m - i + j(m+2) + 1]$;

3) *функция $\zeta_{i,m}(t)$ достигает своего минимального значения в точке $c = c(m, i)$, в которой выполняется неравенство $\zeta_{i,m}(c) > -\dfrac{1}{c^{m-i}}$, при этом $c \in [\tau_i, 3\tau_i]$, где*

$$\tau_i = |\zeta'_{i,m}(0)|^{\frac{1}{i+1}} = \left[\frac{(m+2)^{\frac{2i-m}{m+2}} \Gamma\left(\frac{i+1}{m+2}\right) \Gamma\left(\frac{i+2}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m+2}\right)} \right]^{\frac{1}{i+1}}.$$

Т е о р е м а 2′. *При любых натуральном* m *и целом* $i = 0, 1, \ldots, m - 1$ *решение* $z_{i,m}(x, \mu)$ *задачи*

$$\mu z'' - x^m q(x) z = x^i \psi_{i,m}(x), \qquad z(0) = z(\infty) = 0, \tag{8}$$

где

$$\psi_{i,m}(x) = \frac{[q(x)]^{1-\frac{1}{4}}}{[r(x)]^{m-i-\frac{m}{4}}}, \qquad r(x) = \left[\frac{m+2}{2}\int_0^1 s^m \sqrt{q(sx)}\, ds\right]^{\frac{2}{m+2}}, \tag{9}$$

имеет вид

$$z_{i,m}(x, \mu) = \frac{1}{\mu^{\frac{m-i}{m+2}}} \sqrt[4]{\frac{r(x)}{q(x)}}\, \zeta_{i,m}\left(\frac{xr(x)}{\mu^{\frac{1}{m+2}}}\right)[1 + O(\mu^{\frac{2}{m+2}})], \tag{10}$$

где $\zeta_{i,m}(t)$ — *решение задачи* (7).

О п р е д е л е н и е. Функции $\zeta_{i,m}(x)$ и $z_{i,m}(x, \mu)$ (являющиеся соответственно решениями задач (4), (7), (5), (8)) будем называть функциями элементарных простых всплесков. Линейные комбинации функций элементарных простых всплесков будем называть функциями всплесков.

Т е о р е м а 3. (алгоритм асимптотического разложения решения задачи (1)). *Пусть* m — *произвольное натуральное число,* $q(x)$ *и* $f(x)$ — *достаточно гладкие на некотором сегменте* $[0, a]$ *функции, первая из которых удовлетворяет условиям* (3). *Тогда при любом* $\mu > 0$ *решение* $y(x, \mu)$ *задачи* (1) *при каждом натуральном* n *допускает представление*

$$y(x, \mu) = Y_n(x, \mu) + Z_n(x, \mu) + W_n\left(\frac{1}{\mu}\int_0^x s^m q(s)\, ds, \mu\right) + R_n(x, \mu),$$

в котором:

1) $Y_n(x, \mu)$ — *регулярная часть асимптотического разложения, имеющая вид*

$$Y_n(x, \mu) = Y_0(x) + \mu Y_1(x) + \ldots + \mu^n Y_n(x), \tag{11}$$

где $Y_k(x)$ — *достаточно гладкие на* $[0, a]$ *функции;*

2) $Z_n(x, \mu)$ — *функция типа простого всплеска (в окрестности точки* $x = 0$), *имеющая вид*

$$Z_n(x, \mu) = \sum_{i=0}^{m-1} (a^0_{i,m} + \mu a^1_{i,m} + \ldots + \mu^n a^n_{i,m})\, z_{i,m}(x, \mu), \tag{12}$$

где $a^k_{i,m}$ — *постоянные,* $z_{i,m}(x, \mu)$ — *функции типа элементарных простых всплесков, выражающиеся по формулам* (6). *При этом постоянные* $a^k_{i,m}$ *в* (12) *и функции* $Y_k(x)$ *в* (11) *выражаются через* $q(x)$, $f(x)$ *и функции* $\varphi_{i,m}(x) = \dfrac{q(x)}{[r(x)]^{m-i}}$ — *при помощи следующих рекуррентных соотношений:*

$$a^0_{0,m} = \frac{f(0)}{\varphi_{0,m}(0)}, \qquad a^0_{i,m} = \frac{1}{\varphi_{i,m}(0)}\left[\frac{f^{(i)}(0)}{i!} - \sum_{p=0}^{i-1} a^0_{p,m}\frac{\varphi^{(i-p)}_{p,m}(0)}{(i-p)!}\right],$$

$$i = 1, 2, \ldots, m-1,$$

$$Y_0(x) = \frac{1}{x^m q(x)}\left[f(x) - \sum_{i=0}^{m-1} a^0_{i,m} x^i \varphi_{i,m}(x)\right],$$

$$a_{0,m}^k = -\frac{Y'_{k-1}(0)}{\varphi_{0,m}(0)}, \qquad a_{i,m}^k = -\frac{1}{\varphi_{i,m}(0)}\left[\frac{Y_{k-1}^{(i+1)}(0)}{i!} + \sum_{p=0}^{i-1} a_{p,m}^k \frac{\varphi_{p,m}^{(i-p)}(0)}{(i-p)!}\right],$$

$$i = 1, 2, \dots, m-1,$$

$$Y_k(x) = -\frac{1}{x^m q(x)}\left[Y'_{k-1}(x) + \sum_{i=0}^{m-1} a_{i,m}^k x^i \varphi_{i,m}(x)\right];$$

3) $W_n(t, \mu)$ — *функция типа пограничного слоя (в окрестности точки* $x = 0$), *имеющая вид*

$$W_n(t, \mu) = W_0(t) + \mu W_1(t) + \dots + \mu^n W_n(t),$$

где функции $W_k(t)$ *являются решениями рекуррентной системы дифференциальных уравнений* $W'_k(t) + W_k(t) = 0$, *удовлетворяющие начальным условиям* $W_0(0) = y^0 - Y_0(0)$, $W_k(0) = -Y_k(0)$, $k = 1, 2, \dots, n$, $t = \frac{1}{\mu}\int_0^x s^m q(s)\, ds$;

4) *для остаточного члена* $R_n(x, \mu)$ *справедлива оценка*

$$R_n(x, \mu) = O\left(\mu^{n + \frac{1}{m+1}}\right).$$

Теорема 4 (алгоритм асимптотического разложения решения задачи (2)). *Пусть* m — *произвольное натуральное число, а* $q(x)$ *и* $f(x)$ — *достаточно гладкие соответственно на* $[0, \infty)$ *и* $[0, a]$ *функции, первая из которых удовлетворяет условиям* (3). *Тогда при любом* $\mu > 0$ *решение* $y(x, \mu)$ *уравнения* (2) *при каждом натуральном* n *допускает представление*

$$y(x, \mu) = Y_n(x, \mu) + Z_n(x, \mu) + W_n^0\left(\frac{x}{\mu^{\frac{1}{m+2}}}, \mu\right) + $$

$$+ W_n^a\left(\frac{a-x}{\sqrt{\mu}}, \mu\right) + R_n(x, \mu),$$

в котором:

1) $Y_n(x, \mu)$ — *регулярная часть асимптотического разложения, имеющая вид*

$$Y_n(x, \mu) = Y_0(x) + \mu Y_1(x) + \dots + \mu^n Y_n(x), \tag{13}$$

где $Y_k(x)$ — *достаточно гладкие функции на* $[0, a]$;

2) $Z_n(x, \mu)$ — функция типа простого всплеска, имеющая вид

$$Z_n(x, \mu) = \sum_{i=0}^{m-1} (a_{i,m}^0 + \mu a_{i,m}^1 + \dots + \mu^n a_{i,m}^n)\, z_{i,m}(x, \mu), \tag{14}$$

где $a_{i,m}^k$ — *постоянные и* $z_{i,m}(x, \mu)$ — *функции элементарных простых всплесков, определяемые по формулам* (10). *При этом коэффициенты* $a_{i,m}^k$ *в* (11) *и функции* $Y_k(x)$ *в* (13) *выражаются через* $q(x)$, $f(x)$ *и функции* $\psi_{i,m}(x)$ *из* (9) — *при помощи соотношений*

$$a_{0,m}^0 = \frac{f(0)}{\psi_{0,m}(0)}, \qquad a_{i,m}^0 = \frac{1}{\psi_{i,m}(0)}\left[\frac{f^{(i)}(0)}{i!} - \sum_{p=0}^{i-1} a_{p,m}^0 \frac{\psi_{p,m}^{(i-p)}(0)}{(i-p)!}\right],$$

$$i = 1, 2, \dots, m-1,$$

$$Y_0(x) = -\frac{1}{x^m q(x)}\left[f(x) - \sum_{i=0}^{m-1} a_{i,m}^0 x^i \psi_{i,m}(x)\right],$$

$$a_{0,m}^k = -\frac{Y''_{k-1}(0)}{\psi_{0,m}(0)}, \qquad a_{i,m}^k = -\frac{1}{\psi_{i,m}(0)}\left[\frac{Y_{k-1}^{(i+2)}(0)}{i!} + \sum_{p=0}^{i-1} a_{p,m}^k \frac{\psi_{p,m}^{(i-p)}(0)}{(i-p)!}\right],$$

$$i = 1, 2, \dots, m-1,$$

$$Y_k(x) = \frac{1}{x^m q(x)}\left[Y''_{k-1} + \sum_{i=0}^{m-1} a_{i,m}^k x^i \psi_{i,m}(x)\right], \qquad k = 1, 2, \dots, n;$$

3) $W_n^0(t, \mu)$ — *функция типа пограничного слоя (в точке $x = 0$), имеющая вид*

$$W_n^0(t, \mu) = W_0^0(t) + \mu^{\frac{1}{m+2}} W_1^0(t) + \dots + \mu^n W_{n(m+2)}^0(t),$$

где функции $W_k^0(t)$ являются решениями рекуррентной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 W_0^0}{dt^2} - q(0)\, t^m W_0^0 = 0, \qquad \frac{d^2 W_k^0}{dt^2} - q(0)\, t^m W_k^0 = \sum_{l=1}^{k} t^{m+l} \frac{q^{(l)}(0)}{l!} W_{k-l}^0$$

и удовлетворяют дополнительным условиям $W_0^0(0) = y^0 - Y_0(0)$, $W_{k(m+2)}^0(0) = -Y_k(0)$, $k = 1, 2, \dots, n$, $W_{k(m+2)+j}^0(0) = 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $j = 1, 2, \dots, m+1$, $\lim\limits_{t\to\infty} W_p^0(t) = 0$, $p = 0, 1, \dots, n(m+2)$, $t = \dfrac{x}{\mu^{\frac{1}{m+2}}}$;

4) $W_n^a(\tau, \mu)$ — *функции типа пограничного слоя (в точке $x = a$), имеющие вид*

$$W_n^a(\tau, \mu) = W_0^a(\tau) + \sqrt{\mu}\, W_1^a(\tau) + \dots + \mu^n W_{2n}^a(\tau),$$

где функции $W_k^a(\tau)$ являются решениями рекуррентной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 W_0^a}{d\tau^2} - a^m q(a) W_0^a = 0,$$

$$\frac{d^2 W_k^a}{d\tau^2} - a^m q(a) W_k^a = \sum_{l=1}^{k} (-1)^l \frac{Q^{(l)}(a)}{l!} \tau^l W_{k-l}^a, \qquad k = 1, 2, \dots, 2n,$$

$$Q(x) = x^m q(x), \qquad \tau = \frac{a-x}{\sqrt{\mu}}$$

и удовлетворяют дополнительным условиям $W_0^a(0) = y^a - Y_0(a) + \sum\limits_{i=0}^{m-1} a_{i,m}^0 z_{i,m}(a, 0)$, $W_{2k-1}^a(0) = 0$, $W_{2k}^a(0) = -Y_k(a) - \sum\limits_{i=0}^{m-1} a_{i,m}^k z_{i,m}(a, 0)$, $k = 1, 2, \dots, n$, $\lim\limits_{\tau\to\infty} W_p^a(\tau) = 0$, $p = 0, 1, \dots, 2n$;

5) *для остаточного члена* $R_n(x, \mu)$ *справедлива оценка*

$$R_n(x, \mu) = O(\mu^{n+\frac{1}{m+2}}).$$

Отметим, что результаты, близкие к изложенным в этой статье (но значительно более сложные), имеют место и для дифференциальных уравнений вида $y'' + x^m q(x) y = f(x)$.

В заключение выражаю глубокую благодарность В. К. Дзядыку за предложенную идею ввести в рассмотрение функции $\zeta_{i,m}(x)$ и за ценные консультации по вопросам, относящимся к теории функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Дородницын, Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка, УМН, т. 7, вып. 6, 1952.
2. R. E. Langer, The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order, with special reference to a turning point, Trans. Amer. Math. Soc., 67, 1949, 461—490.
3. С. А. Ломов, Построение асимптотических решений некоторых задач с параметрами, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 32, № 4, 1968.

Поступила 30.III 1973 г.
Киевский технологический институт пищевой промышленности