УДК 519.41/47

О свободных группах многообразия, определенного тождеством $[x, y; u, v; z] = 1$

И. Д. Иванюта

1. Пусть F — абсолютно свободная группа произвольного ранга больше единицы, $X = \langle x_1, x_2, \ldots \rangle$ — множество ее свободных образующих, E — множество всех эндоморфизмов F, $\Gamma = \langle \varphi/\varphi \in E, x_i\varphi = a_i^{-1} x_i a_i = x_i^{a_i}, a_i \in F \rangle$. В данной заметке доказано, что свободная группа $G = F/[F'', F]$ многообразия $\mathfrak{M}$, определенного тождеством $[x, y; u, v; z] = 1$, не удовлетворяет условию максимальности для Γ-подгрупп, т. е. для подгрупп, допускающих эндоморфизмы, индуцированные в G эндоморфизмами из Γ. Поскольку Γ включает множество всех внутренних автоморфизмов группы F, отсюда следует результат Ф. Холла [1] о том, что группа G не удовлетворяет условию максимальности для нормальных подгрупп.

2. Пусть F — абсолютно свободная группа ранга два, x, y — ее свободные образующие, $G = F/[F'', F]$. Основной в работе является следующая теорема.

Теорема 1. *Группа G не удовлетворяет условию максимальности для Γ-подгрупп.*

Приведем сначала несколько вспомогательных утверждений. В работе [2] доказана лемма.

Лемма 1. *Множество коммутаторов $c(m, n) = [[x, y]^{x^m y^n}, [x, y]]\,[F'', F]$ ($m \geqslant 0$, n — целое число, и если $m = 0$, то $n > 0$) является базисом абелевой группы $F''/[F'', F]$.*

Замечания. Если $v = x^{p_1} y^{q_1} x^{p_2} y^{q_2} \ldots x^{p_k} y^{q_k}$, то

$$[[x, y]^v, [x, y]] \equiv [[x, y]^{x^{\Sigma p_i} y^{\Sigma q_i}}, [x, y]] \pmod{[F'', F]},$$

и поэтому можно считать, что $v = x^p y^q$. Кроме того, для произвольных u, $w \in F$

$$[[x^u, y^w]^{(x^u)^p (y^w)^q}, [x^u, y^w]] \equiv [[x^{uw^{-1}}, y]^{x^p y^q}, [x^{uw^{-1}}, y]] \pmod{[F'', F]}.$$

Следовательно, достаточно рассмотреть такие эндоморфизмы $\varphi \in \Gamma$, что $x\varphi = x^u$, $y\varphi = y$, $u \in F$.

Пусть $d(u) = [[x^u, y]^v, [x^u, y]]\,[F'', F]$. Если

$$u = y^{n_1} x^{m_1} y^{n_2} x^{m_2} \ldots y^{n_k} x^{m_k}, \tag{1}$$

то запишем $d(u) = d(n_1 m_1 n_2 m_2 \ldots n_k m_k)$. Легко проверить, что $d(1) = d(x^m) = d(y^n)$, и если $u \in F$ имеет вид (1), то $d(x^r u y^s) = d(u)$. Поэтому достаточно рассмотреть коммутаторы $d(u)$ для элементов u вида (1) и $v = x^p y^q$.

При доказательстве теоремы 1 основную роль играет такая лемма.

Лемма 2. $d(n_1 m_1 n_2 m_2 \ldots n_k m_k) = c^{-k+1}(v)\, d(n_1 m_1)\, d(n_2 m_2) \ldots d(n_k m_k)$.

Доказательство леммы можно провести индукцией по k. Прежде всего, легко получить следующие равенства:

$$[x, y^n] = [x, y]\,[x, y]^y \ldots [x, y]^{y^{n-1}}, \qquad n > 0,$$

$$[x, y^{-n}] = [x, y]^{-y^{-1}}\,[x, y]^{-y^{-2}} \ldots [x, y]^{-y^{-n}}, \qquad n > 0, \tag{2}$$

$$[x, y^{n_1} x^{m_1} y^{n_2} x^{m_2} \ldots y^{n_k} x^{m_k}] = [x, y^{n_1}]^{x^{m_1} y^{n_2} x^{m_2} \ldots y^{n_k} x^{m_k}}\,[x, y^{n_2}]^{x^{m_2} \ldots y^{n_k} x^{m_k}} \ldots$$
$$\ldots [x, y^{n_k}]^{x^{m_k}}.$$

Используя (2), получим

$$[[x^u, y]^v, [x^u, y]] = [([x, u]^{-1} [x, u]^y [x, y])^v, [x, u]^{-1} [x, u]^y [x, y]] \equiv$$
$$\equiv [[x, y]^{v\sigma}, [x, y]^{\sigma}] \pmod{[F'', F]}, \tag{3}$$

где

$$\sigma = x^{\Sigma m_i} y^{\Sigma n_i} - x^{\Sigma m_i} y^{\sum\limits_{i>1} n_i} + x^{\sum\limits_{i>1} m_i} y^{\sum\limits_{i>1} n_i} - x^{\sum\limits_{i>1} m_i} y^{\sum\limits_{i>2} n_i} + \ldots$$
$$\ldots + x^{m_k} y^{n_k} - x^{m_k} + 1. \tag{4}$$

На основании (3), (4) имеем

$$d(nm) = c^3(v)\, c^{-1}(vx^m)\, c^{-1}(vx^{-m})\, c^{-1}(vy^n)\, c^{-1}(vy^{-n})\, c(vx^m y^n)\, c(vx^{-m} y^{-n}) \doteq$$
$$= c^3(v)\, \psi(m, n). \tag{5}$$

Далее,

$$d(n_1 m_1 n_2 m_2) = c^5(v)\, \psi(m_1, n_1)\, \psi(m_2, n_2)\, c(vx^{m_1} y^{n_2})\, c(vx^{-m_1} y^{-n_2}) \times$$
$$\times c^{-1}(vx^{m_1} y^{n_1+n_2})\, c^{-1}(vx^{-m_1} y^{-n_1-n_2})\, c^{-1}(vx^{m_1+m_2} y^{n_2})\, c^{-1}(vx^{-m_1-m_2} y^{-n_2}) \times$$
$$\times c(vx^{m_1+m_2} y^{n_1+n_2})\, c(vx^{-m_1-m_2} y^{-n_1-n_2}) = c^5(v)\, \psi(m_1, n_1)\, \psi(m_2, n_2) \times$$
$$\times f(m_1, m_2; n_1, n_2).$$

Учитывая (5), легко вычислить, что $f(m_1, m_2; n_1, n_2) \equiv 1 \pmod{[F'', F]}$, и тогда $d(n_1 m_1 n_2 m_2) = c^{-1}(v)\, d(n_1 m_1)\, d(n_2 m_2)$. Аналогично $d(n_1 m_1 n_2 m_2 n_3 m_3) = c^7(v)\, \psi(m_1, n_1)\, \psi(m_2, n_2)\, \psi(m_3, n_3)\, f(m_1, m_2; n_1, n_2)\, f(m_2, m_3; n_2, n_3)\, f(m_1 + m_2, m_3; n_1, n_2 + n_3) = c^{-2}(v)\, d(n_1 m_1)\, d(n_2 m_2)\, d(n_3 m_3)$. Применив метод индукции, легко завершить доказательство леммы.

На основании леммы 1 выразим $d(nm)$ через свободные образующие группы G'', учитывая при этом, что если $r < 0$, то $c(x^r y^s) = c^{-1}(x^{-r} y^{-s})$.

Пусть $v = x^p y^q$, $p > 0$. Согласно (5)

$$d(nm) = c^3(x^p y^q)\, c^{-1}(x^{p+m} y^q)\, c^{-1}(x^{p-m} y^q)\, c^{-1}(x^p y^{q+n})\, c^{-1}(x^p y^{q-n}) \times$$
$$\times c(x^{p+m} y^{q+n})\, c(x^{p-m} y^{q-n}). \tag{6}$$

Рассмотрим возможные случаи.

1) Если $m > 0$, $p - m > 0$, то $d(nm)$ имеет вид (6).

2) Если $m > 0$, $p - m < 0$, то

$$d(nm) = c^3(x^p y^q)\, c^{-1}(x^{p+m} y^q)\, c(x^{m-p} y^{-q})\, c^{-1}(x^p y^{q+n})\, c^{-1}(x^p y^{q-n}) \times$$
$$\times c(x^{p+m} y^{q+n})\, c^{-1}(x^{m-p} y^{n-q}).$$

3) $m < 0$, $p + m > 0$. Обозначив $-m = r$, $-n = s$, получим для $d(sr)$ выражение вида (6) при предположениях случая 1).

4) $m < 0$, $p + m < 0$. Обозначив $-m = r$, $-n = s$, получим случай 2).

Отсюда следует, что достаточно рассмотреть случай, когда $m > 0$. Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 3. *Коммутатор $d(nm)$ выражается через базис группы G'' следующим образом:*

$$d(nm) = c^3(x^p y^q)\, c^{-1}(x^{p+m} y^q)\, c^{-1}(x^{p-m} y^q)\, c^{-1}(x^p y^{q+n})\, c^{-1}(x^p y^{q-n}) \times$$
$$\times c(x^{p+m} y^{q+n})\, c(x^{p-m} y^{q-n}), \quad m > 0, \ p - m > 0, \tag{7}$$

$$d(nm) = c^3(x^p y^q)\, c^{-1}(x^{p+m} y^q)\, c(x^{m-p} y^{-q})\, c^{-1}(x^p y^{q+n})\, c^{-1}(x^p y^{q-n}) \times$$
$$\times c(x^{p+m} y^{q+n})\, c^{-1}(x^{m-p} y^{n-q}), \quad m > 0, \ p - m < 0. \tag{8}$$

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим множество элементов $c(q_i) = [[x, y]^{y^{q_i}}, [x, y]] [F'', F]$, $i = 1, 2, \ldots$, где $q_i > 0$, $q_i < q_j$ при $i < j$, и покажем что Г-подгруппа H_r группы G, порожденная элементами $c(q_i)$, $i \leqslant r$, не содержит элементов $c(q_s)$ при $s > r$. Тем самым будет показано, что Г-подгруппы H_r образуют бесконечную строго возрастающую последовательность. Из (7) и (8) следует, что

$$d_q(nm) = [[x^{y^n x^m}, y]^{y^q}, [x^{y^n x^m}, y]] [F'', F] = c^3(y^q)\, c^{-1}(y^{q+n})\, c^{-1}(y^{q-n}) \times$$
$$\times c^{-1}(x^m y^q)\, c(x^m y^{-q})\, c(x^m y^{q+n})\, c^{-1}(x^m y^{n-q}), \tag{9}$$

где $m > 0$, и если $q + n < 0$, то $c^{-1}(y^{q+n}) = c(y^{-q-n})$ (аналогично для $c(y^{q-n})$). В силу леммы 2 достаточно показать, что произвольное слово, составленное из элементов $d_{q_i}(n_i m_i)$ при $i \leqslant r$ не равно $c(q_s)$ для $s > r$. Очевидно, можно считать, что все m_i равны между собой.

Произведения $c^{-1}(y^{q+n}) c^{-1}(y^{q-n})$, $c^{-1}(x^m y^q)\, c^{-1}(x^m y^{-q})$ и $c(x^m y^{q+n}) \times \times c^{-1}(x^m y^{n-q})$ назовем соответственно левой, средней и правой частью $d_q(nm)$. Множители $c^{-1}(y^{q+n})$ и $c(x^m y^{q+n})$, $c^{-1}(y^{q-n})$ и $c^{-1}(x^m y^{n-q})$ будем называть соответствующими множителями левой и правой части. Для того чтобы слово, составленное из выражений вида (9), было равно $c(y^{q_s})$, необходимо, чтобы средние и правые части входящих в него множителей $d_q(nm)$ полностью сократились.

Очевидно, множители левых частей не могут сократиться с множителями средних и правых частей. Если какой-то множитель правой части из $d_{q_i}^{\varepsilon_i}(n_i m)$ сокращается с каким-то множителем правой части из $d_{q_i}^{\varepsilon_j}(n_j m)$, то, как нетрудно заметить, соответствующие множители левых частей тоже сократятся (здесь и далее $\varepsilon, \varepsilon_i, \varepsilon_j, \ldots = \pm 1$). Если один из множителей средней части $d_{q_i}^{\varepsilon_i}(n_i m)$ сокращается с множителем средней части $d_{q_j}^{\varepsilon_j}(n_j m)$, то $q_i = q_j$, и средние части $d_{q_i}^{\varepsilon_i}$ и $d_{q_j}^{\varepsilon_j}$ сокращаются между собой. Если же какой-либо множитель средней части из $d_{q_i}^{\varepsilon_i}(n_i m)$ (например, $c^{-\varepsilon_i}(x^m y^{q_i})$) сокращается с множителем правой части из $d_{q_j}^{\varepsilon_j}(n_j m)$, а $c^{-\varepsilon_i}(x^m y^{-q_i})$ — с множителем правой части из $d_{q_k}^{\varepsilon_k}(n_k m)$, то соответствующие им множители из левых частей либо сократятся, либо равны между собой и равны $c^{\varepsilon}(y^{q_i})$. Таким образом, при полном сокращении множителей средних и правых частей множители левых частей либо сократятся, либо дадут произведение элементов $c^{\varepsilon}(y^{q_i})$, $i \leqslant r$. Теорема доказана.

Следствием теоремы 1 является следующая теорема.

Теорема 2. *Свободная группа произвольного ранга больше единицы многообразия $\mathfrak{M}$ не удовлетворяет условию максимальности для Г-подгрупп.*

Действительно, если G_n — свободная группа ранга $n > 2$ многообразия $\mathfrak{M}$, H — Г-подгруппа G_2, K — Г-замыкание H в G_n, то, очевидно, $K \cap G_2 = H$. Следовательно, по последовательности $H_1 < H_2 \ \ldots$, построенной в теореме 1, легко получить бесконечную строго возрастающую последовательность $K_1 < K_2 < \ldots$ Г-подгрупп в G_n.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Hall, Finiteness conditions for soluble groups., Proc. London Math. Soc., 4, 1954, 419—436.
2. J. N. Ridley, The free centre-by-metabelian groups of rank two., Proc. London Math. Soc., 20, 1970, 321—347.

Поступила 9.XII 1971 г
Институт математики АН УССР