УДК 531.382

Об уравнениях движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки

В. Н. Кошляков

В данной работе получены динамические уравнения для общего случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки, выраженные в функциях параметров Родрига—Гамильтона. В качестве примера приложения названных уравнений рассматривается задача устойчивости вертикального вращения тела для случая Лагранжа.

1. Рассматривается движение тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой O, в которой расположено начало неподвижной системы координат $O\xi\eta\zeta$. Допустим, что подвижные оси координат $Oxyz$, связанные с телом, совпадают с главными осями эллипсоида инерции тела для точки O. Обозначив через A, B, C моменты инерции тела относительно осей x, y, z, имеем известные уравнения

$$A\frac{dp}{dt}+(C-B)\,qr=M_x,\quad B\frac{dq}{dt}+(A-C)\,rp=M_y,$$
$$C\frac{dr}{dt}+(B-A)\,pq=M_z, \tag{1.1}$$

где следует считать

$$M_x=P(\gamma_2 z_c-\gamma_3 y_c),\quad M_y=P(\gamma_3 x_c-\gamma_1 z_c),\quad M_z=P(\gamma_1 y_c-\gamma_2 z_c). \tag{1.2}$$

В уравнениях (1.1) и (1.2) обозначено: P — вес тела; p, q, r — проекции угловой скорости тела на оси x, y, z соответственно; γ_1, γ_2, γ_3 — направляющие косинусы оси $O\zeta$ с осями x, y, z; x_c, y_c, z_c — координаты центра масс в системе x, y, z. Фигурирующие в системе (1.1) проекции p, q, r выражаются через функции эйлеровых углов посредством известных кинематических уравнений

$$p=\dot\psi\sin\vartheta\sin\varphi+\dot\vartheta\cos\varphi,\quad q=\dot\psi\sin\vartheta\cos\varphi-\dot\vartheta\sin\varphi,\quad r=\dot\psi\cos\vartheta+\dot\varphi, \tag{1.3}$$

где ψ — угол прецессии, ϑ — угол нутации, φ — угол чистого вращения.

Введем в рассмотрение параметры Родрига—Гамильтона, выражения для которых через углы ψ, ϑ и φ в нашем случае имеют вид [1]:

$$\lambda_0=\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2},\quad \lambda_1=\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\psi-\varphi}{2},\quad \lambda_2=\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\psi-\varphi}{2},$$
$$\lambda_3=\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2}. \tag{1.4}$$

Уравнения (1.3), представленные через функции параметров λ_s и их производных, записываются в форме:

$$p=2(\lambda_0\dot\lambda_1-\lambda_1\dot\lambda_0+\dot\lambda_2\lambda_3-\dot\lambda_3\lambda_2),\ q=2(\lambda_0\dot\lambda_2-\lambda_2\dot\lambda_0+\dot\lambda_3\lambda_1-\dot\lambda_1\lambda_3),$$
$$r=2(\lambda_0\dot\lambda_3-\lambda_3\dot\lambda_0+\dot\lambda_1\lambda_2-\dot\lambda_2\lambda_1). \tag{1.5}$$

Отсюда имеем, в частности:

$$\dot p=2(\lambda_0\ddot\lambda_1-\lambda_1\ddot\lambda_0+\lambda_3\ddot\lambda_2-\lambda_2\ddot\lambda_3),\ \dot q=2(\lambda_0\ddot\lambda_2-\lambda_2\ddot\lambda_0+\lambda_1\ddot\lambda_3-\lambda_3\ddot\lambda_1),$$
$$\dot r=2(\lambda_0\ddot\lambda_3-\lambda_3\ddot\lambda_0+\lambda_2\ddot\lambda_1-\lambda_1\ddot\lambda_2), \tag{1.6}$$

а также

$$qr = 4\{\dot\lambda_2\dot\lambda_3(\lambda_0^2-\lambda_1^2)+\lambda_2\lambda_3(\dot\lambda_0^2-\dot\lambda_1^2)+\dot\lambda_1\dot\lambda_0(\lambda_3^2-\lambda_2^2)+\lambda_1\lambda_0(\dot\lambda_3^2-\dot\lambda_2^2)+$$
$$+(\lambda_2\lambda_0+\lambda_1\lambda_3)(\dot\lambda_1\dot\lambda_2-\dot\lambda_0\dot\lambda_3)+(\lambda_1\lambda_2-\lambda_0\lambda_3)(\dot\lambda_2\dot\lambda_0+\dot\lambda_1\dot\lambda_3)\},$$
$$rp = 4\{\dot\lambda_3\dot\lambda_1(\lambda_0^2-\lambda_2^2)+\lambda_1\lambda_3(\dot\lambda_0^2-\dot\lambda_2^2)+\dot\lambda_0\dot\lambda_2(\lambda_1^2-\lambda_3^2)+\lambda_2\lambda_0(\dot\lambda_1^2-\dot\lambda_3^2)+$$
$$+(\lambda_0\lambda_3+\lambda_1\lambda_2)(\dot\lambda_3\dot\lambda_2-\dot\lambda_0\dot\lambda_1)+(\lambda_2\lambda_3-\lambda_1\lambda_0)(\dot\lambda_2\dot\lambda_1+\dot\lambda_0\dot\lambda_3)\}, \qquad (1.7)$$
$$pq = 4\{\dot\lambda_1\dot\lambda_2(\lambda_0^2-\lambda_3^2)+\lambda_1\lambda_2(\dot\lambda_0^2-\dot\lambda_3^2)+\dot\lambda_3\dot\lambda_0(\lambda_2^2-\lambda_1^2)+\lambda_3\lambda_0(\dot\lambda_2^2-\dot\lambda_1^2)+$$
$$+(\lambda_2\lambda_3+\lambda_0\lambda_1)(\dot\lambda_3\dot\lambda_1-\dot\lambda_0\dot\lambda_2)+(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2)(\dot\lambda_2\dot\lambda_3+\dot\lambda_0\dot\lambda_1)\}.$$

С помощью соотношений (1.6) уравнения (1.1) можно представить в виде

$$\lambda_0\ddot\lambda_1-\lambda_1\ddot\lambda_0+\lambda_3\ddot\lambda_2-\lambda_2\ddot\lambda_3+\frac{1}{2}\frac{C-B}{A}qr=\frac{1}{2}\frac{M_x}{A},$$
$$\lambda_0\ddot\lambda_2-\lambda_2\ddot\lambda_0+\lambda_1\ddot\lambda_3-\lambda_3\ddot\lambda_1+\frac{1}{2}\frac{A-C}{B}rp=\frac{1}{2}\frac{M_y}{B}, \qquad (1.8)$$
$$\lambda_0\ddot\lambda_3-\lambda_3\ddot\lambda_0+\lambda_2\ddot\lambda_1-\lambda_1\ddot\lambda_2+\frac{1}{2}\frac{B-A}{C}pq=\frac{1}{2}\frac{M_z}{C}.$$

К этим уравнениям присоединяем уравнение

$$\lambda_0\ddot\lambda_0+\lambda_1\ddot\lambda_1+\lambda_2\ddot\lambda_2+\lambda_3\ddot\lambda_3+\dot\lambda_0^2+\dot\lambda_1^2+\dot\lambda_2^2+\dot\lambda_3^2=0, \qquad (1.9)$$

получаемое двукратным дифференцированием соотношения связи между параметрами λ_s:

$$\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=1. \qquad (1.10)$$

Разрешая уравнения (1.8) и (1.9) относительно величин $\ddot\lambda_s$ (с использованием соотношения (1.10)), получаем интересующие нас уравнения в форме [2]:

$$2ABC\ddot\lambda_0-BC[(C-B)qr-M_x]\lambda_1-CA[(A-C)rp-M_y]\lambda_2-$$
$$-AB[(B-A)pq-M_z]\lambda_3+2ABC\lambda_0(\dot\lambda_0^2+\dot\lambda_1^2+\dot\lambda_2^2+\dot\lambda_3^2)=0,$$
$$2ABC\ddot\lambda_1+EC[(C-B)qr-M_x]\lambda_0-CA[(A-C)rp-M_y]\lambda_3+$$
$$+AB[(B-A)pq-M_z]\lambda_2+2ABC\lambda_1(\dot\lambda_0^2+\dot\lambda_1^2+\dot\lambda_2^2+\dot\lambda_3^2)=0,$$
$$2ABC\ddot\lambda_2+BC[(C-B)qr-M_x]\lambda_3+CA[(A-C)rp-M_y]\lambda_0-$$
$$-AB[(B-A)pq-M_z]\lambda_1+2ABC\lambda_2(\dot\lambda_0^2+\dot\lambda_1^2+\dot\lambda_2^2+\dot\lambda_3^2)=0, \qquad (1.11)$$
$$2ABC\ddot\lambda_3-BC[(C-B)qr-M_x]\lambda_2+CA[(A-C)rp-M_y]\lambda_1+$$
$$+AB[(B-A)pq-M_z]\lambda_0+2ABC\lambda_3(\dot\lambda_0^2+\dot\lambda_1^2+\dot\lambda_2^2+\dot\lambda_3^2)=0.$$

Уравнения (1.11) справедливы для общего случая движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки, когда A, B и C различны между собой, а M_x, M_y и M_z выражаются посредством формул (1.2).

2. В качестве примера приложения общих уравнений (1.11) рассмотрим случай Лагранжа, который имеет место, когда $A = B$, $x_c = y_c = 0$, $z_c \neq 0$. Примем $z_c = a > 0$. Остановимся на вертикальном вращении тела, чему соответствуют частные решения вида

$$p^* = 0, \ q^* = 0, \ r^* = r_0, \ \gamma_1^* = \gamma_2^* = 0, \ \gamma_3^* = 1, \tag{2.1}$$

причем можно считать

$$\vartheta^* = 0, \ \psi^* = \psi_0, \ \varphi^* = \varphi_0. \tag{2.2}$$

Движение (2.1) примем в качестве невозмущенного. В силу (1.1) и (1.3 имеем

$$\dot{\psi}^* + \dot{\varphi}^* = r_0 = 2c, \ \psi^* = \varphi^* = 2\chi, \tag{2.3}$$

причем c — некоторая постоянная, а переменная величина χ имеет вид

$$\chi = \chi(0) + ct, \tag{2.4}$$

где $\chi(0)$ — значение χ при $t = 0$. Параметры Родрига—Гамильтона, соответствующие невозмущенному движению, будут

$$\lambda_0^* = \cos\chi, \ \lambda_1^* = \lambda_2^* = 0, \ \lambda_3^* = \sin\chi. \tag{2.5}$$

В возмущенном движении примем

$$\lambda_0 = \lambda_0^* + \lambda_0', \ \lambda_1 = \lambda_1', \ \lambda_2 = \lambda_2', \ \lambda_3 = \lambda_3^* + \lambda_3'. \tag{2.6}$$

Обратимся сначала ко второму из уравнений (1.11), которое для нашего случая имеет вид

$$2A\ddot{\lambda}_1 + (C - A)\, r\,(p\lambda_3 + q\lambda_0) - M_x\lambda_0 + M_y\lambda_3 + 2A\lambda_1(\dot{\lambda}_0^2 + \dot{\lambda}_1^2 + \dot{\lambda}_2^2 + \dot{\lambda}_3^2) = 0, \tag{2.7}$$

где в силу (1.3) и (1.10) имеем

$$p\lambda_3 + q\lambda_0 = 2\dot{\lambda}_2 + r\lambda_1. \tag{2.8}$$

Далее, если учесть, что направляющие косинусы γ_1 и γ_2 выражаются через параметры Родрига—Гамильтона посредством формул

$$\gamma_1 = 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2), \quad \gamma_2 = 2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3), \tag{2.9}$$

получим

$$M_y\lambda_3 - M_x\lambda_0 = -2Pa(\lambda_3^2\lambda_1 + \lambda_0^2\lambda_1). \tag{2.10}$$

Переходя в уравнении (2.7) к возмущенным переменным λ_s' по схеме (2.6), учитывая выражения (2.8) и (2.10), получим, ограничиваясь лишь членами первого порядка в отношении переменных λ_s', уравнение вида

$$A\ddot{\lambda}_1' + [c^2(2C - A) - Pa]\,\lambda_1' + 2c\,(C - A)\,\dot{\lambda}_2' = 0. \tag{2.11}$$

Аналогичные рассуждения в отношении третьего из уравнений системы (1.9) приводят к уравнению

$$A\ddot{\lambda}_2' + [c^2(2C - A) - Pa]\,\lambda_2' - 2c\,(C - A)\,\dot{\lambda}_1' = 0. \tag{2.12}$$

Если ограничиться сначала случаем $A = C$, то из условия ограниченности решений уравнений (2.11) и (2.12) немедленно получаем неравенство вида

$$c^2A - Pa > 0 \tag{2.13}$$

или, в силу (2.3),

$$Ar_0^2 - 4Pa > 0. \tag{2.14}$$

Это условие совпадает с известным достаточным условием устойчивости движения для случая Лагранжа при $A = C$ [3].

При противоположном знаке неравенства (2.14) имеет место явная неустойчивость по отношению к переменным λ_s. Рассмотрим теперь случай, когда $C \neq A$. Характеристическое уравнение системы (2.11) и (2.12) будет иметь вид

$$A^2D^4 + 2\{c^2[(C-A)^2 + C^2] - APa\}D^2 + [c^2(2C-A) - Pa]^2 = 0. \tag{2.15}$$

Система уравнений (2.11) и (2.12) будет устойчивой, если оба корня уравнения (2.15) относительно λ^2 будут вещественны и отрицательны. Для этого необходимо, чтобы коэффициенты и дискриминант уравнения (2.15) были положительными. Первое из этих требований приводит к условию

$$c^2[(C-A)^2 + C^2] > APa \tag{2.16}$$

или

$$r_0^2[(C-A)^2 + C^2] > 4APa. \tag{2.17}$$

Условие положительности дискриминанта приводит к неравенству

$$\{c^2[(C-A)^2 + C^2] - APa\}^2 - A^2[c^2(2C-A) - Pa]^2 > 0, \tag{2.18}$$

которое после упрощений приводится к виду

$$(C-A)^2(C^2r_0^2 - 4APa) > 0. \tag{2.19}$$

При $A \neq C$ имеем

$$C^2r_0^2 - 4APa > 0. \tag{2.20}$$

Если это условие выполняется, то и подавно будет выполняться условие (2.17). Условие же (2.20) совпадает с известным достаточным условием устойчивости волчка Лагранжа [3]. Обратимся теперь к первому из уравнений (1.11), которое с учетом уравнения

$$p\lambda_2 - q\lambda_1 = r\lambda_0 - 2\dot{\lambda}_3 \tag{2.21}$$

и выражений для моментов M_x и M_y приводится к виду:

$$2A\ddot{\lambda}_0 + (C-A)r(r\lambda_0 - 2\dot{\lambda}_3) + 2A\lambda_0(\dot{\lambda}_0^2 + \dot{\lambda}_1^2 + \dot{\lambda}_2^2 + \dot{\lambda}_3^2) = 0. \tag{2.22}$$

Переходя к возмущенным переменным по (2.6), получим, удерживая лишь члены первого порядка малости относительно величин и их производных, уравнение вида

$$A\ddot{\lambda}_0' + c^2(2C-A)\lambda_0' - 2c(C-A)\dot{\lambda}_3' + 2cA(\cos^2\chi\dot{\lambda}_3' - \sin\chi\cos\chi\dot{\lambda}_0') = 0. \tag{2.23}$$

Аналогично этому четвертое уравнение системы (1.9) приводится к форме

$$A\ddot{\lambda}_3' + c^2(2C-A)\lambda_3' + 2c(C-A)\dot{\lambda}_0' + 2cA(\sin\chi\cos\chi\dot{\lambda}_3' - \sin^2\chi\dot{\lambda}_0') = 0. \tag{2.24}$$

Система уравнений (2.23) и (2.24), имеющих периодические коэффициенты, приводима с помощью неособенного преобразования с группой вращения, не меняющего свойств устойчивости, к системе с постоянными коэффициентами. Указанное преобразование имеет вид

$$u_1 = -\lambda_0'\cos\chi - \lambda_3'\sin\chi, \quad u_2 = -\lambda_0'\sin\chi + \lambda_3'\cos\chi, \tag{2.25}$$

где u_1 и u_2 — некоторые новые переменные. В переменных u_1, u_2 интересующая нас система представится в виде

$$A\ddot{u}_1 + 2c^2 A u_1 + 2c(C - A)\dot{u}_2 = 0,$$
$$A\ddot{u}_2 - 2cC\dot{u}_1 = 0. \tag{2.26}$$

Интегрируя один раз второе из полученных уравнений, имеем

$$A\dot{u}_2 = 2cCu_1 + L, \tag{2.27}$$

где L — произвольная постоянная интегрирования. Ее можно обратить в нуль, выбрав

$$A\dot{u}_2(0) = 2cCu_1(0), \tag{2.28}$$

где $u_1(0)$ и $\dot{u}_2(0)$ — значения переменных u_1 и $\dot{u}_2$ в начальный момент времени. Полагая условие (2.28) выполняющимся, получим

$$A^2\ddot{u}_1 + 2c^2[A^2 + 2C(C - A)]u_1 = 0. \tag{2.29}$$

Для обеспечения ограниченности решений этого уравнения выражение в квадратных скобках должно быть положительным. Это требование приводит к неравенству

$$(C - A)^2 + C^2 > 0, \tag{2.30}$$

которое, конечно, всегда выполняется.

Таким образом, анализ уравнений (2.24) и (2.25) не вносит каких-либо добавок в отношении устойчивости к условию (2.14), полученному при анализе уравнений (2.11) и (2.12).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Лурье, Аналитическая механика, Физматгиз, М., 1961.
2. В. Н. Кошляков, Теория гироскопических компасов, «Наука», М., 1972.
3. Н. Г. Четаев, Устойчивость движения, Гостехиздат, М., 1955.

Поступила 8.V 1973 г.

Институт математики АН УССР