

## Решение одной краевой задачи теории фильтрации

*В. И. Лаврик*

Рассмотрим движение грунтовых вод под гидротехническим сооружением в том случае, когда водопроницаемое основание состоит из двух горизонтальных слоев грунта, причем нижний слой обладает значительно большей теоретически бесконечно большой водопроницаемостью, чем верхний слой (рис. 1, *a*).

Линия раздела грунтов  $A_1B_1$  в данном случае является линией равного напора и поэтому на этой линии устанавливается некоторый постоянный напор  $h = -H_0$ . Впервые такого рода задачи рассматривались в работах Н. К. Гиринского [1, 2]. Однако в этих работах не был решен вопрос об определении величины  $H_0$  в зависимости от всех основных факторов, влияющих на режим фильтрации. Наоборот, величине  $H_0$  приписывались заранее заданные значения и в зависимости от этих значений рассматривались

различные случаи фильтрации. Дальнейшие исследования этой задачи при задании различных значений  $H_0$  были проведены С. Н. Нумеровым [3].

Заметим, что существенное влияние на значение напора  $H_0$  оказывают параметры гидротехнического сооружения, вид области фильтрации и граничные условия. Поэтому только в одном частном случае, а именно, в случае симметричного гидротехнического сооружения (например, плоский флютбет), принятое в работах Н. К. Гиринского значение  $H_0 = \frac{1}{2} H$  соответствовало, как будет показано дальше, истинному значению.

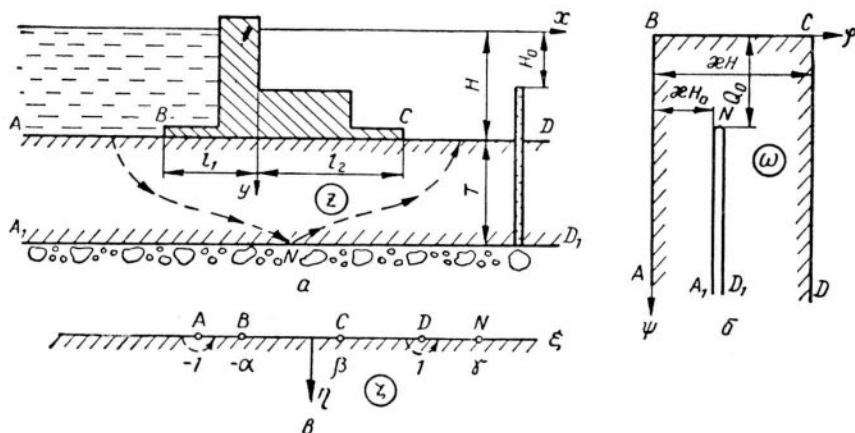


Рис. 1.

Таким образом, будем рассматривать плоскую установившуюся фильтрацию под гидротехническим сооружением при неизвестном значении напора  $H_0$ .

Найдем комплексный потенциал фильтрации и значение напора  $H_0$  на линии раздела  $A_1D_1$  при фильтрации под плоским флютбетом. Область комплексного потенциала  $\omega$  в рассматриваемом случае изображается в виде вертикальной полуполосы с разрезом (рис. 1, б). Отобразим конформно нижнюю вспомогательную полуплоскость  $\zeta$  (рис. 1, в) на область  $\omega$ . Воспользовавшись интегралом Кристоффеля—Шварца [4], искомую отображающую функцию будем искать в виде

$$\omega = a \int_{-\alpha}^{\zeta} \frac{(\zeta - \gamma) d\zeta}{(\zeta^2 - 1) V(\zeta + \alpha)(\zeta - \beta)}. \quad (1)$$

Постоянную  $a$ , входящую в правую часть (1), найдем при помощи метода обхода особых точек (полюсов) [4], а именно: с одной стороны, при обходе особой точки  $\zeta = -1$  вдоль полуокружности  $C_{-1}$  в отрицательном направлении функция (1) получит приращение  $\Delta\omega_{-1}$ , равное

$$\Delta\omega_{-1} = -a \int_{C_{-1}} \frac{(\zeta - \gamma) d\zeta}{(\zeta^2 - 1) V(\zeta + \alpha)(\zeta - \beta)} =$$

$$= -a\pi i \operatorname{Res} \left[ \frac{\zeta - \gamma}{(\zeta^2 - 1) V(\zeta + \alpha)(\zeta - \beta)}; -1 \right] = \frac{(1 + \gamma) a \pi i}{2 V(1 - \alpha)(1 + \beta)},$$

а, с другой стороны, это приращение легко найти, рассматривая область  $\omega$  и, следовательно,  $\Delta\omega_{-1} = -\kappa H_0$ . Поэтому имеем

$$a = \frac{2\kappa H_0 V(1 - \alpha)(1 + \beta)}{(1 + \gamma) \pi i}. \quad (2)$$

Поступая аналогично при обходе особой точки  $\zeta = 1$ , найдем приращение  $\Delta\omega_1 = -\frac{(1-\gamma)\pi i}{2\sqrt{(1+\alpha)(1-\beta)}}$ . С другой стороны,  $\Delta\omega_1 = -\kappa(H-H_0)$ . Следовательно, имеем

$$a = \frac{2\kappa(H-H_0)\sqrt{(1+\alpha)(1-\beta)}}{(1-\gamma)\pi i}. \quad (3)$$

Постоянная  $a$  определяется равенствами (2) и (3) с точностью до знака. В дальнейшем выбор знака будет определяться из взаимно однозначного соответствия при отображении плоскости  $\zeta$  на область  $\omega$ . Учитывая последнее замечание, из (2) и (3) легко получим следующее важное соотношение:

$$H_0 = \frac{(1+\gamma)\sqrt{(1+\alpha)(1-\beta)}}{(1+\gamma)\sqrt{(1+\alpha)(1-\beta)} - (1-\gamma)\sqrt{(1-\alpha)(1+\beta)}} H. \quad (4)$$

В частности, в случае симметрии гидротехнического сооружения  $\alpha = \beta$  и  $\gamma = \infty$ . Поэтому из соотношения (4), переходя к пределу при  $\gamma \rightarrow \infty$ , получаем

$$H_0 = \frac{1}{2} H, \quad (5)$$

т. е. зависимость, которая априори задавалась Н. К. Гириным.

Запишем выражение (1) в виде

$$\begin{aligned} \omega = & \frac{(1+\gamma)a}{2} \int_{-\alpha}^{\zeta} \frac{d\zeta}{(\zeta+1)\sqrt{(\zeta+\alpha)(\zeta-\beta)}} + \\ & + \frac{(1-\gamma)a}{2} \int_{-\alpha}^{\zeta} \frac{d\zeta}{(\zeta-1)\sqrt{(\zeta+\alpha)(\zeta-\beta)}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Правая часть (6) после подстановки  $t = \sqrt{\frac{\zeta+\alpha}{\zeta-\beta}}$  запишется в виде

$$\omega = (1+\gamma)a \int_0^t \frac{dt}{(1-\alpha) - (1+\beta)t^2} - (1-\gamma) \int_0^t \frac{dt}{(1+\alpha) - (1-\beta)t^2}$$

или после интегрирования и возвращения к старой переменной получим

$$\begin{aligned} \omega = & \frac{(1+\gamma)a}{\sqrt{(1-\alpha)(1+\beta)}} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{(1+\beta)(\zeta+\alpha)}{(1-\alpha)(\zeta-\beta)}} - \\ & - \frac{(1-\gamma)a}{\sqrt{(1+\alpha)(1-\beta)}} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{(1-\beta)(\zeta+\alpha)}{(1+\alpha)(\zeta-\beta)}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Учитывая выражения (2), (3) и замечание относительно выбора знаков перед радикалами, найденную отображающую функцию (7) перепишем в таком окончательном виде:

$$\omega = -\frac{2\kappa H_0}{\pi i} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{(1+\beta)(\zeta+\alpha)}{(1-\alpha)(\zeta-\beta)}} - \frac{2\kappa(H-H_0)}{\pi i} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{(1-\beta)(\zeta+\alpha)}{(1+\alpha)(\zeta-\beta)}}. \quad (8)$$

Правая часть равенства (8) состоит из двух слагаемых, каждое из которых является многозначной функцией. Для конформного отображения полуплоскости  $\zeta$  на область  $\omega$  следует выбрать их однозначные ветви. Выбор необходимых однозначных ветвей определим из взаимно однозначного соответствия между точками действительной оси  $\text{Im}\zeta = 0$  и границей области комплексного потенциала  $\omega$ . Для этого рассмотрим значения функции (8) и ее двух слагаемых на отдельных интервалах.

На интервале  $AB$ , когда  $-\alpha < \xi < -\alpha$ , имеем

$$\frac{1 + \beta}{1 - \alpha} \frac{\xi + \alpha}{\xi - \beta} = \frac{1 + \beta}{1 - \alpha} \frac{1 - \frac{\alpha}{|\xi|}}{1 + \frac{\beta}{|\xi|}} < \frac{1 - \frac{\alpha}{|\xi|}}{1 - \alpha} < 1;$$

$$\frac{1 - \beta}{1 + \alpha} \frac{\xi + \alpha}{\xi - \beta} = \frac{1 - \beta}{1 + \alpha} \frac{1 - \frac{\alpha}{|\xi|}}{1 + \frac{\beta}{|\xi|}} < 1. \quad (9)$$

Следовательно, учитывая (9), функцию (8) на интервале  $AB$  определим следующими равенствами:

$$\varphi = 0; \quad (10)$$

$$\psi = \frac{2\kappa H_0}{\pi} \text{Arth} \sqrt{\frac{(1 + \beta)(\xi + \alpha)}{(1 - \alpha)(\xi - \beta)}} + \frac{2\kappa(H - H_0)}{\pi} \text{Arth} \sqrt{\frac{(1 - \beta)(\xi + \alpha)}{(1 + \alpha)(\xi - \beta)}}.$$

На интервале  $BC$ , когда  $-\alpha < \xi < \beta$ , имеем

$$\frac{1 + \beta}{1 - \alpha} \frac{\xi + \alpha}{\xi - \beta} < 0; \quad \frac{1 - \beta}{1 + \alpha} \frac{\xi + \alpha}{\xi - \beta} < 0, \quad (11)$$

кроме того,  $\varphi(\beta, 0) = \kappa H$ . Поэтому функцию (8) определим на этом интервале следующим образом:

$$\varphi = \frac{2\kappa H_0}{\pi} \text{arctg} \sqrt{\frac{(1 + \beta)(\xi + \alpha)}{(1 - \alpha)(\beta - \xi)}} + \frac{2\kappa(H - H_0)}{\pi} \text{arctg} \sqrt{\frac{(1 - \beta)(\xi + \alpha)}{(1 + \alpha)(\beta - \xi)}}, \quad (12)$$

$$\psi = 0.$$

На интервале  $CD$ , когда  $\beta < \xi < 1$ , имеем

$$\frac{1 + \beta}{1 - \alpha} \frac{\xi + \alpha}{\xi - \beta} > 1; \quad \frac{1 - \beta}{1 + \alpha} \frac{\xi + \alpha}{\xi - \beta} = \frac{1 - \beta}{1 + \alpha} \frac{1 + \frac{\alpha}{\xi}}{1 - \frac{\beta}{\xi}} > \frac{1 - \beta}{1 - \frac{\beta}{\xi}} > 1, \quad (13)$$

и поэтому функция (8) на этом интервале представится в виде

$$\varphi = \kappa H; \quad (14)$$

$$\psi = \frac{\kappa H_0}{\pi} \ln \frac{\sqrt{\frac{(1 + \beta)(\xi + \alpha)}{(1 - \alpha)(\xi - \beta)}} + 1}{\sqrt{\frac{(1 + \beta)(\xi + \alpha)}{(1 - \alpha)(\xi - \beta)}} - 1} + \frac{\kappa(H - H_0)}{\pi} \ln \frac{\sqrt{\frac{(1 - \beta)(\xi + \alpha)}{(1 + \alpha)(\xi - \beta)}} + 1}{\sqrt{\frac{(1 - \beta)(\xi + \alpha)}{(1 + \alpha)(\xi - \beta)}} - 1}.$$

На интервале  $DNA$ , когда  $1 < |\xi| < \infty$ , имеем

$$\frac{1 + \beta}{1 - \alpha} \frac{\xi + \alpha}{\xi - \beta} > 1; \quad \frac{1 - \beta}{1 + \alpha} \frac{\xi + \alpha}{\xi - \beta} < 1. \quad (15)$$

Поэтому функция (8) на этом интервале будет иметь следующий вид:

$$\varphi = \kappa H_0;$$

$$\psi = \frac{\kappa H_0}{\pi} \ln \frac{\sqrt{\frac{(1+\beta)(\xi+\alpha)}{(1-\alpha)(\xi-\beta)}} + 1}{\sqrt{\frac{(1+\beta)(\xi+\alpha)}{(1-\alpha)(\xi-\beta)}} - 1} + \frac{\kappa(H-H_0)}{\pi} \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{(1-\beta)(\xi+\alpha)}{(1+\alpha)(\xi-\beta)}}}{1 - \sqrt{\frac{(1-\beta)(\xi+\alpha)}{(1+\alpha)(\xi-\beta)}}}. \quad (16)$$

Формулы (10), (12), (14), (16) позволяют по заданным  $\alpha$  и  $\beta$  определить все искомые фильтрационные характеристики. В частности, из формулы (16), переходя к пределу при  $\xi \rightarrow \gamma$ , найдем величину фильтрационного расхода  $Q_0$ , поступающего из верхнего в нижний бьеф, т. е.

$$Q_0 = \frac{\kappa H_0}{\pi} \ln \frac{\sqrt{\frac{(1+\beta)(\gamma+\alpha)}{(1-\alpha)(\gamma-\beta)}} + 1}{\sqrt{\frac{(1+\beta)(\gamma+\alpha)}{(1-\alpha)(\gamma-\beta)}} - 1} + \frac{\kappa(H-H_0)}{\pi} \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{(1-\beta)(\xi+\alpha)}{(1+\alpha)(\xi-\beta)}}}{1 - \sqrt{\frac{(1-\beta)(\xi+\alpha)}{(1+\alpha)(\xi-\beta)}}}. \quad (17)$$

При  $\alpha = \beta$  и  $\gamma \rightarrow \infty$  из (17) получаем

$$Q_0 = \frac{\kappa H}{2} \ln \frac{\sqrt{1+\alpha} + \sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1+\alpha} - \sqrt{1-\alpha}}. \quad (18)$$

Чтобы определить значения постоянных  $\alpha$  и  $\beta$ , достаточно конформно отобразить рассматриваемую область фильтрации на вспомогательную полуплоскость  $\zeta$ .

В случае плоского флютбета область фильтрации  $z$  отобразится на нижнюю полуплоскость  $\zeta$  при помощи функции

$$\zeta = \text{th} \frac{\pi(z - iH)}{2T}, \quad (19)$$

причем

$$\alpha = \beta = \text{th} \frac{\pi l}{2T} \left( l = \frac{l_1 + l_2}{2} \right). \quad (20)$$

Подставляя (19) в (8), найдем искомый комплексный потенциал в виде

$$\omega = -\frac{2\kappa H_0}{\pi i} \text{Arth} \sqrt{\frac{\left(1 + \text{th} \frac{\pi l}{2T}\right) \left[\text{th} \frac{\pi(z - iH)}{2T} + \text{th} \frac{\pi l}{2T}\right]}{\left(1 - \text{th} \frac{\pi l}{2T}\right) \left[\text{th} \frac{\pi(z - iH)}{2T} - \text{th} \frac{\pi l}{2T}\right]}} - \\ - \frac{2\kappa(H - H_0)}{\pi i} \text{Arth} \sqrt{\frac{\left(1 - \text{th} \frac{\pi l}{2T}\right) \left[\text{th} \frac{\pi(z - iH)}{2T} + \text{th} \frac{\pi l}{2T}\right]}{\left(1 + \text{th} \frac{\pi l}{2T}\right) \left[\text{th} \frac{\pi(z - iH)}{2T} - \text{th} \frac{\pi l}{2T}\right]}}. \quad (21)$$

Теперь рассмотрим плоский флютбет со шпунтом (рис. 2,а). Для нахождения комплексного потенциала  $\omega$  в этом случае отобразим область фильтрации  $z_1$  на область  $z$  (рис. 2,б) при помощи функции [4]

$$z = \frac{2T}{\pi} \left[ \text{Arth} \left( \pm \cos \frac{\pi S}{2T} \sqrt{\text{tg}^2 \frac{\pi S}{2T} + \text{th}^2 \frac{\pi(z_1 - iH)}{2T}} - \delta \right) + iH, \quad (22) \right.$$

где

$$\delta = \frac{1}{2} \left[ \text{Arth} \left( \cos \frac{\pi S}{2T} \sqrt{\text{tg}^2 \frac{\pi S}{2T} + \text{th}^2 \frac{\pi l_2}{2T}} \right) - \right. \\ \left. - \text{Arth} \left( \cos \frac{\pi S}{2T} \sqrt{\text{tg}^2 \frac{\pi S}{2T} + \text{th}^2 \frac{\pi l_1}{2T}} \right) \right]. \quad (23)$$

Тем самым задача о фильтрации под плоским флютбетом со шпунтом сведена к задаче о фильтрации под плоским симметричным флютбетом без

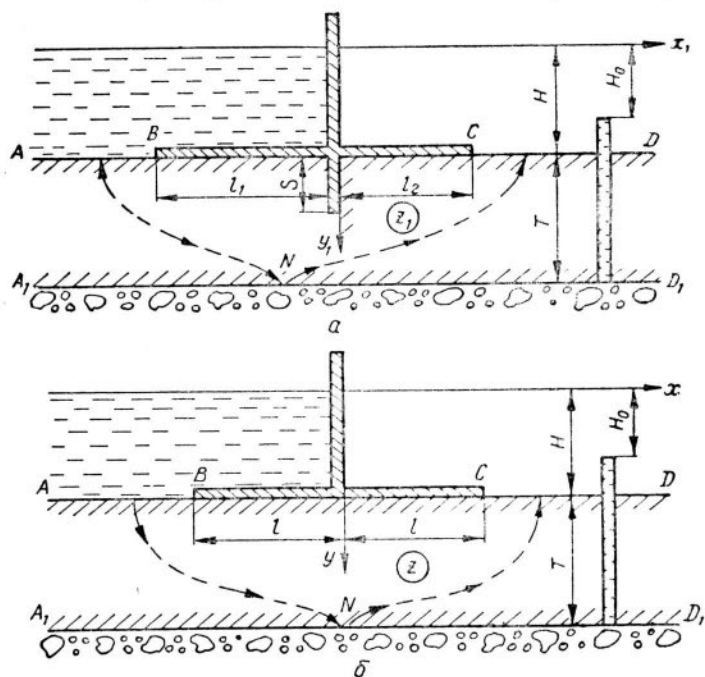


Рис. 2.

шпунта, причем ширина «вспомогательного» флютбета  $2l$  в этом случае определяется при помощи равенства

$$l = \frac{T}{\pi} \left[ \text{Arth} \left( \cos \frac{\pi S}{2T} \sqrt{\text{tg}^2 \frac{\pi S}{2T} + \text{th}^2 \frac{\pi l_1}{2T}} \right) + \right. \\ \left. + \text{Arth} \left( \cos \frac{\pi S}{2T} \sqrt{\text{tg}^2 \frac{\pi S}{2T} + \text{th}^2 \frac{\pi l_2}{2T}} \right) \right]. \quad (24)$$

Имея функции (8) и (22), легко записать искомый комплексный потенциал фильтрации и, следовательно, определить все необходимые фильтрационные характеристики, при этом решение будет единственным, если задано значение  $Q_0$  или точка  $\gamma$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Н. К. Г и р и н с к и й, Основы теории движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями при наличии по нижней поверхности грунта напора постоянной величины, Гидротехническое строительство, № 6, 1936.
2. Н. К. Г и р и н с к и й, Расчет фильтрации под гидротехническими сооружениями на неоднородных грунтах, Гостехиздат, М.—Л., 1941.
3. В. И. А р а в и н, С. Н. Н у м е р о в, Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде, Гостехиздат, М., 1953.
4. В. И. Л а в р и к, В. Н. С а в е н к о в, Справочник по конформным отображениям, «Наукова думка», К., 1970.

Поступила 15.II 1973 г.  
Институт математики АН УССР