УДК 513.882

Биположительные проекторы в частично упорядоченном векторном пространстве (плотность и экстремальные свойства)

В. С. Тен

Векторное пространство E, частично упорядоченное с помощью воспроизводящей линейной полугруппы K ($E = K - K$, $K \cap (-K) = \{0\}$), с набором биположительных проекторов P [1] для краткости будем называть *пространством* (E, K, P).

В данной заметке введем понятие плотности (E, K, P)-пространства, грубо говоря, являющееся характеристикой того, насколько детально разбивается частично упорядоченное пространство (E, K) на подпространства с помощью проекторов класса P, и докажем два свойства биположительных проекторов.

1. Определения. Пусть $x \in K$; через $p_x \in P$ обозначим проектор, обладающий следующими свойствами: а) если $x = 0$, то $p_x = 0$; б) если $x > 0$, то $p_x x = x$ и для любого проектора $q \in P \setminus \{0\}$, меньшего p_x $(q < p_x)$, имеет место $qx \neq 0$. Проектор p_x будем называть *проектором-носителем* вектора x. Если для каждого вектора $x \in K$ существует p_x, то будем говорить, что пространство (E, K, P) *(a)-плотно*. Если пространство (E, K, P) (a)-плотно и для любого вектора $x \in K \setminus \{0\}$, какой бы ни был вектор $y \in (p_x K) \setminus \{0\}$, существует ненулевой вектор $z \in K \setminus \{0\}$: $z \leqslant x, y$, то будем говорить, что пространство (E, K, P) *(b)-плотно*. Пусть далее $P_x = \{p \in P \mid px = x\}$ и $P(x) = \{p \in P \mid \forall q \in P_x : p \wedge q' = 0\}$. Если для любых двух векторов $x \in K \setminus \{0\}$, $y \in K$ из того, что $x \nleqslant y$ следует существование проектора $p \in P(x)$ такого, что $px > py$, то будем говорить, что пространство (E, K, P) *(c)-плотно*.

Замечание 1. Пространство $C_{[0,1]}$ с линейной полугруппой K неотрицательных функций (a)-плотно ($P = \{0, I\}$ и для любого $x \in K \setminus \{0\}$: $: p_x = I$) и не является ни (b)-плотным, ни (c)-плотным. Этот пример показывает, что (a)-плотность является очень слабым условием. Не (a)-плотные пространства (E, K, P) имеются. Например, пусть E — пространство функций $f(t)$, заданных на отрезке $[0,2]$, удовлетворяющих следующим условиям: а) $f(t) \mid [0,1] \in C_{[0,1]}$; б) существует такое натуральное число k, что для всех $t \in \left[1, 1 + \frac{1}{k}\right]: f(t) = f(1)$; в) функция $f(t)$ постоянна на промежутках $\left(1 + \frac{1}{l}, 1 + \frac{1}{l-1}\right]$ для всех $l = \overline{2, k}$. Пусть далее K — линейная полугруппа неотрицательных функций из E. Тогда произвольный проект $p \in P(E, K)$ представим в виде

$$p = \alpha_0 p_{0l} + \sum_{m=2}^{l} \alpha_m p_m \quad (\alpha_0 + \alpha_l = 1, \ \ l \geqslant 1),$$

где $p_{0l} f(t) = \chi_{\left[0, 1 + \frac{1}{l}\right]} f(t)$, $p_m f(t) = \chi_{\left(1 + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m-1}\right]} f(t)$, χ_ω — характеристическая функция множества ω, $\alpha_m = 0$ или 1.

Функция $x(t) = \begin{pmatrix} 1 - t, & t \in [0,1], \\ 0 & t \in (1,2] \end{pmatrix}$ — положительная $\left(x(t) \in K \setminus \{0\}\right)$ и для нее не существует p_x, следовательно, пространство (E, K, P) не (a)-плотно.

Замечание 2. Любая из перечисленных плотностей пространства (E, K, P) может иметь место как в архимедовых, так и в неархимедовых пространствах (E, K). Следуя [2, 3], архимедовым называем пространство (E, K), в котором для двух векторов $x, y \in K$ из условия $nx \leqslant y$ для любых натуральных n следует, что $x = 0$, и неархимедовым — в противном случае. Неархимедово пространство, приведенное в [3, стр. 81], является и (b)-плотным и (c)-плотным, причем $P = \{0, 1\}$, поскольку оно упорядочено.

2. Элементарные свойства проекторов p_x.

1) Пусть $x \in K$, $p \in P$. Тогда:

а) если $px = x$, то $p_x \leqslant p$;

б) если $p \leqslant p_x$, $y = px$, то $p_y = p$.

2) Пусть $x, y \in K$. Тогда:

а) всегда имеет место равенство $p_{x \vee y} = p_x \vee p_y$;

б) если пространство (E, K, P) (b)-плотно, то $p_{x \wedge y} = p_x \wedge p_y$.

Замечание 3. В утверждении 2, б) условие (b)-плотности существенно. В случае пространства, приведенного в замечании 1, утверждение 2, б) неверно.

3. Максимальные свойства проекторов $p \in P$.

Теорема 1. а) *Пусть* $x \in K$, $p \in P$, *тогда* $px = \sup\{u \in pK \mid u \leqslant x\}$.
б) *Пусть* (E, K) — *архимедов* K-*линеал* [3] *и* (E, K, P) (b)-*плотно, тогда для любых* $x, y \in K$ *имеет место соотношение*

$$p_x y = \sup_n (nx \wedge y).$$

Доказательство. Утверждение а) является непосредственным следствием биположительности проектора p. Докажем утверждение б). Покажем сначала, что $nx \wedge y \leqslant p_x y$. В самом деле, $y_n = (nx) \wedge y = (np_x x) \wedge y = [p_x (nx)] \wedge y \leqslant p_x (nx), y$. Тогда $y_n = p_x y_n \leqslant p_x y$. Далее нужно доказать, что если $u \geqslant y_n$, то $u \geqslant p_x y$, тем самым будет доказано утверждение б). Пусть $w = u \wedge p_x y \leqslant p_x y$, но тогда $w \in p_x K$, следовательно,

$$v = (p_x y - w) \wedge x \in p_x K, \ p_x y - w \in p_x K, \ w + v \leqslant w + (p_x y - w) \leqslant p_x y.$$

Поскольку $y \geqslant w = u \wedge p_x y \geqslant (nx) \wedge y$, то $(nx) \wedge y = (nx) \wedge y \wedge w = (nx) \wedge w$. Тогда $v + (nx) \wedge y = v + (nx) \wedge w = (nx + v) \wedge (w + v)$. Но $v = (p_x y - w) \wedge x \leqslant x$, и учитывая, что $w + v \leqslant p_x y$, получаем $v + (nx) \wedge y = (nx + v) \wedge (w + v) \leqslant (nx + x) \wedge p_x y = [(n + 1) x] \wedge y$. Итак, $v + (nx) \wedge y \leqslant [(n + 1) x] \wedge y$ и, стало быть,

$$0 \leqslant v \leqslant [(n + 1) x] \wedge y - (nx) \wedge y,$$

$$0 \leqslant v \leqslant (nx) \wedge y - [(n - 1) x] \wedge y,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 \leqslant v \leqslant (2x) \wedge y - x \wedge y,$$

$$0 \leqslant v \leqslant x \wedge p_x y \leqslant x \wedge y.$$

Сложив правые и левые части этой системы неравенств, получаем $0 \leqslant nv \leqslant [(n + 1) x] \wedge y \leqslant p_x y$ и в силу архимедовости (E, K) $0 = v = (p_x y - w) \wedge x$. Пусть $z = p_x y - w$, тогда $z \wedge x = 0$ и в силу (b)-плотности (E, K, P) согласно утверждению 2, б) $p_z \wedge p_x = 0$. Но, как отмечалось выше, $z \in p_x K$, т.е. $p_x z = z$, поэтому согласно утверждению 1,б) $p_z \leqslant p_x$, следовательно, $p_z = p_z \wedge p_x = 0$ и $0 = p_z z = z = p_x y - w$. Итак доказано, что $p_x y = w = u \wedge p_x y$, следовательно, $p_x y \leqslant u$. Теорема доказана.

Замечание 4. В K_σ-пространстве проектор p, определяемый формулой $py = \sup (nx \wedge y)$, $y \in K$, оказывается биположительным [2, 3]. Теорема 1 утверждает обратное: каждый биположительный проектор p_x имеет представление $p_x y = \sup\limits_n (nx \wedge y)$, $y \in K$. Причем не требуется, чтобы пространство (E, K) было условно σ-полным. Однако вводится дополнительное требование архимедовости (которое всегда имеет место в K_σ-пространстве) и (b)-плотности (E, K, P). Оба перечисленных требования существенны. Например, пространство $C_{[0,1]}$ с линейной полугруппой K неотрицательных функций архимедово, но не (b)- плотно, и теорема 1 не верна. Двумерный K-линеал, описанный в [2], (b)-плотен, но не архимедов, и в этом случае теорема также не верна.

Приводимое ниже следствие дает полное описание класса биположительных проекторов для некоторых полуупорядоченных пространств.

Следствие. 1. *Пусть (E, K) — K_σ-пространство* [3], *тогда пространство (E, K, P) (b)-плотно; если при этом не пуст класс единичных элементов $J(E) \neq \varnothing$, то класс биположительных проекторов P исчерпывается проекторами-носителями вектора $x \in K$.*

2.Пусть $E = \Sigma\{R_\xi \mid \xi \in \Xi\}$, где R_ξ является изоморфно действительной прямой, $K_\xi = \{x \in R_\xi \mid x \geqslant 0\}$, $K = \Sigma K_\xi$.

Пусть далее p_ξ — проектор проектирования на ξ-ю координату. Тогда

$$P = \{p = V\{p_\xi \mid \xi \in \Lambda\} \mid \Lambda \subset \Xi\}.$$

4. Коммутативная полнота класса P.

Теорема 2. *Пусть пространство (E, K, P) (c)-плотно и архимедово. Если положительный проектор $p_0 : E, K \to E, K$ перестановочен с каждым биположительным проектором $p \in P$ $(pp_0 = p_0p)$, то проектор p_0 также является биположительным $p_0 \in P$.*

Предварительно сформулируем следующее утверждение.

Лемма. *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *и $x, y \in E$. Тогда:*

а) *если при любом натуральном $n : nx \leqslant y$, то $x \leqslant 0$;*

б) *если для любого $\alpha \in (0,1) : \alpha x \leqslant y$, то $x \leqslant y$.*

Доказательство теоремы. Пусть $y \in K \setminus \{0\}$, $x = p_0y$. Нужно доказать, что $x \leqslant y$. Рассмотрим случай, когда $x \neq 0$. Если $x \nleqslant y$, то согласно утверждению б) леммы существует такое число $\mu \in (0,1)$, что $\mu x \nleqslant y$. Тогда в силу (c)-плотности $(E, K; P)$ существует проектор $q \in P(x)$ такой, что $q(\mu x) > qy$. Это означает, во-первых, что $\mu qx > 0$, т.е. $qx > 0$, а, во-вторых, $p_0q(\mu x) = \mu qp_0x = \mu qp_0p_0y = \mu qp_0y = \mu qx \geqslant p_0qy = qp_0y = qx$, следовательно, $\mu qx \geqslant qx$ или $0 \geqslant (1-\mu)qx$; но так как $1 - \mu > 0$, то $qx \leqslant 0$. Полученное противоречие показывает, что $p_0y = x \leqslant y$, но тогда $(I - p_0)y \geqslant 0$ и, стало быть, $p_0' = I - p_0 : K \to K$, т.е. $p_0 \in P$.

Замечание 5. Теорема 2 в некоторой мере является обратной теореме заметки [1]. Но это обращение не полное. А именно, бывают случаи, когда все положительные проекторы $(\neq 0, I)$ перестановочны со всеми биположительными проекторами и тем не менее ни один из них не является биположительным. Например, в пространстве $C[0, I]$ с введенным в предыдущем замечании упорядочением. И в этом случае легко привести пример положительного проектора $(\neq 0, I)$. Пусть $0 \leqslant x(t) \in C_{[0,1]}$ и $\int_0^1 x(t)\,dt = 1$, тогда $pz(t) = x(t)\int_0^1 z(\tau)\,d\tau$ является положительным, не биположительным проектором.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Тен, Биположительные проекторы в векторном частичноупорядоченном пространстве, УМЖ, т. 24, № 2, 1972.
2. Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер, Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Гостехиздат, М., 1950.
3. Б. З. Вулих, Введение в теорию полуупорядоченных пространств, Физматгиз, М., 1961.

Поступила 30.XII 1971 г.

Институт прикладной математики и механики АН УССР