УДК 517.911

Об одном операторном уравнении в гильбертовом пространстве

А. Т. Заплитная

В работе изучается сходимость процесса Галеркина для нелинейног[о] операторного уравнения с запаздывающим аргументом в гильбертовом про[-] странстве.

Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве H дифферен[-] циальное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Ax(t) + B(t, x(t-\tau)) \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(t) = x_\tau(t) \qquad \text{при} \qquad -\tau \leqslant t \leqslant 0. \tag{2}$$

Здесь $x(t)$ — искомая, $x_\tau(t)$ — заданная функции со значениями в H, A — постоянный линейный, $B(t, x)$ — нелинейный операторы, действующие в H

Относительно операторов A и $B(t, x)$ будем предполагать выполненны[-] ми некоторые из условий:

а) A — положительно определенный самосопряженный оператор [с] областью определения $D(A)$;

б) оператор $B(t, x)$ непрерывен по t на $[0, T]$, действует в H при любом $t \in [0, T]$ и в некотором шаре S_R радиуса R с центром в точке $x_\tau(0)$ удовлет[-] воряет условию Липшица с постоянной, не зависящей от t:

$$\| B(t, x) - B(t, y) \| \leqslant L_1(R) \| x - y \|,$$

где $L_1(R)$ — некоторая постоянная;

в) оператор $B(t, A^{-\alpha}x)$ при некотором $\alpha \in (0, 1)$ действует в H пр[и] каждом $t \in [0, T]$, непрерывен по t и в шаре S_R удовлетворяет услови[ю] Липшица:

$$\| B(t, A^{-\alpha}x) - B(t, A^{-\alpha}y) \| \leqslant L_2(R) \| x - y \|.$$

Решением задачи (1), (2) будем называть непрерывно дифференциру[-] емую на $[-\tau, T]$ $(T > 0)$ функцию $x(t)$, удовлетворяющую при каждом $t \in [0, T]$ уравнению (1) и на $[-\tau, 0]$ превращающуюся в заданную фун[-] кцию $x_\tau(t)$.

Задача (1), (2) сводится к задаче

$$x(t) = U(t, 0)\, x_\tau(0) + \int_0^t U(t, s)\, B(s, x(s-\tau))\, ds, \tag{3}$$

$$x(t) = x_\tau(t), \qquad -\tau \leqslant t \leqslant 0, \tag{2'}$$

где $U(t, s) = e^{-(t-s)A}$ — сильно непрерывная полугруппа ограниченных опе[-] раторов, порожденная уравнением $\dfrac{dx(t)}{dt} = -Ax(t)$.

Решение задачи (3), (2) называется [1] обобщенным решением задач[и] (1), (2). В [2] доказано существование и единственность обобщенного решени[я] задачи (1), (2) как при малом t, так и для любого $t \in [0, T]$. Аналогично [3] можно показать, что при определенных условиях решение интегральног[о] уравнения (3) существует, единственно и будет решением задачи (1), (2)

Метод Галеркина [4] приближенного решения задачи (1), (2) заключает[-] ся в том, что уравнение (1) заменяют уравнением

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = -P_n A x_n(t) + P_n B(t, x_n(t-\tau)), \tag{4}$$

а условие (2) условием

$$x_n(t) = P_n x_\tau(t) \text{ при } -\tau \leqslant t \leqslant 0, \tag{5}$$

где P_n — оператор ортогонального проектирования пространства H на его n-мерное подпространство H_n. При этом предполагается, что последовательность подпространств H_n удовлетворяет условиям:

А) H_n является инвариантным подпространством положительно определенного самосопряженного оператора C^β $(0 \leqslant \beta \leqslant 1)$, имеющего ту же область определения, что и оператор A^β;

Б) операторы P_n сильно сходятся при $n \to \infty$ к единичному оператору: $P_n x \to x$ $(x \in H)$.

Так как $P_n A$ является положительно определенным самосопряженным оператором в пространстве H_n, то переход от уравнения (1) к уравнению (4) связан с переходом к другому пространству.

Теорема 1. *Пусть*: 1) *A — линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H и удовлетворяющий условию* а); 2) *$B(t, x)$ — нелинейный оператор, действующий при каждом $t \in [0, T]$ в том же пространстве H и удовлетворяющий условию* б); 3) *выполняются условия* А) *и* Б).

Тогда при каждом n задача (4), (5) *имеет решения, определенные на некотором сегменте* $[0, T_1]$ $(T_1 < T)$. *Эти решения равномерно по $t \in [0, T_1]$ сходятся к обобщенному решению уравнения* (1) *при начальном условии* (2).

Существование решений задачи (4), (5) можно доказать (см. [2]), применяя принцип сжатых отображений в пространстве $C_{x_\tau}[-\tau, T_1]$ функций со значениями в H, непрерывных на $[-\tau, T_1]$ и совпадающих с заданной функцией $P_n x_\tau(t)$ на $[-\tau, 0]$.

Для доказательства сходимости этих решений к обобщенному решению уравнения (1) достаточно показать, что разность $x_n(t) - P_n x(t)$ стремится к нулю при $n \to \infty$ равномерно по $t \in [0, T_1]$, так как тогда $x_n(t) - x(t) = [x_n(t) - P_n x(t)] + (P_n - I)\, x(t)$ стремится к нулю при $n \to \infty$ в силу условия Б). Для этого рассматривается уравнение

$$\frac{dP_n x(t)}{dt} = -P_n A x(t) + P_n B(t, x(t-\tau)), \tag{6}$$

которое получается из уравнения (1) применением оператора P_n.

Если нелинейный оператор $B(t, x)$ подчинен в некотором смысле оператору A, то справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Путь*: 1) *выполняются условия* 1) и 3) *теоремы* 1; 2) *оператор $B(t, x)$ удовлетворяет условию* в).

Тогда при некотором $0 < \alpha < 1$ разность $A^\alpha x_n(t) - A^\alpha x(t)$ стремится к нулю при $n \to \infty$ равномерно относительно $t \in [0, T_1]$.

Замечание. Подобные результаты можно получить для уравнения (1) с переменным оператором $A(t)$ при условиях, аналогичных условиям П. Е. Соболевского [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Е. Соболевский, О приближенных методах решения дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, ДАН СССР, т. 115, № 2, 1957.
2. Т. А. Заманов, О дифференциальных уравнениях с запаздывающим аргументом в банаховом пространстве, Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, т. 4, Изд. Ун-та дружбы народов, М., 1967.
3. П. Е. Соболевский, Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве, Труды Моск. матем. о-ва, т. 10, 1961.
4. Т. А. Заманов, Применение метода Галеркина к эволюционному уравнению с запаздывающим аргументом, Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, т. 7, Изд. Ун-та дружбы народов, М., 1969.

Поступила 31.III 1972 г.
Вычислительный центр Госплана УССР