УДК 517.512.6.518.6.61

Об одном методе решения неоднородной граничной задачи с непрерывно дискретными параметрами при непрерывно дискретном возмущении

К. Я. Кухта

Непрерывно дискретное приложение возмущающих сил широко встречается в прикладных задачах теории колебаний, однако простых аналитических методов их решения по-существу не имеется. В данной работе предложен метод решения граничных задач, являющийся единым при непрерывно дискретном, непрерывном и дискретном приложении возмущения, который по своей вычислительной схеме удобен для реализации на ЭВМ.

Идейную сторону метода проиллюстрируем на решении неоднородной граничной задачи установившихся вынужденных колебаний весомой струны

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \tag{1}$$

$$U(0) = U(l) = 0. \tag{2}$$

Предполагается, что $f(x, t) = F(x)\sin\omega t$, где $F(x)$ — плотность непрерывно распределенной силы, а ее частота ω не совпадает с собственными частотами весомой струны. Пусть струна имеет кусочно-постоянную плотность $\rho(x)$ и пусть в точках $x = l_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, совпадающих с точками разрывов параметра $\rho(x)$, закреплены дискретные массы $m_1, m_2, \ldots$ $\ldots, m_{n-1}$, соизмеримые с массой струны. Пусть в этих же точках $x = l_i$ приложены дискретные гармонические силы $p_1(t)$, $p_2(t)$, $\ldots$, p_{n-1}, где $p_i(t) = p_i\sin\omega t$. Тогда вместо граничной задачи (1), (2) будем рассматривать граничную задачу

$$\rho_i\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + f(x, t), \tag{3}$$

$$U_1(o) = U_n(l) = 0, \tag{4}$$

где $U(x, t) = U_i(x, t)$ для $l_{i-1} < x < l_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Разделяя переменные в (3), (4), приходим к следующим задачам:

$$T_0 X_i''(x) + \rho_i\omega^2 X_i(x) + F(x) = 0, \tag{5}$$

$$X_1(0) = X_n(l) = 0. \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Решением уравнения (5) будет функция

$$X_i(x) = A_i S_i(x - l_{i-1}) + B_i T_i(x - l_{i-1}) + F_i(x). \tag{7}$$

Здесь $S_i = \cos\lambda_i(x - l_{i-1})$, $T_i = \dfrac{\sin\lambda_i(x - l_{i-1})}{\lambda_i}$ — функции нормальной фундаментальной системы [1, 2], $\lambda_i^2 = \dfrac{\omega^2}{a_i^2}$, $a_i^2 = \dfrac{T_0}{\rho_i}$, $F_i(x)$—частотное решение, которое выбираем таким образом, чтобы $F_i(0) = 0$, $F_i'(0) = 0$.

Очевидно, что решение (7) должно удовлетворять условиям сопряжения

$$X_{i+1}(l_i) = X_i(l_i), \quad X_{i+1}'(l_i) - X_i'(l_i) = \frac{-m_i\omega^2 X_i(l_i) - P_1 k_i}{T_0}. \tag{8}$$

Второе из условий (8) можно получить, если проинтегрировать уравнение (1) в интервале $l_i + \varepsilon$, $l_i - \varepsilon$ и положить при $\varepsilon \to 0$ [3]

$$\int\limits_{l_i-\varepsilon}^{l_i+\varepsilon} f(x, t)\,dx \to P_i(t), \text{ а } \int\limits_{l_i-\varepsilon}^{l_i+\varepsilon} \rho(x)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\,dx \to m_i\frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2}. \tag{9}$$

Из граничного условия и свойств нормальной фундаментальной системы следует, что $X_1(0) = A_1 = 0$, тогда будут справедливы соотношения

$$A_i = B_1\varphi_i^{(1)} + P_1\mu_i^{(1)} + F_1\eta_i^{(1)} + D_1\xi_i^{(1)}, \tag{10}$$

$$B_i = B_1\varphi_i^{(2)} + P_1\mu_i^{(2)} + F_1\eta_i^{(2)} + D_1\xi_i^{(2)}, \tag{11}$$

где

$$\varphi_1^{(1)} = 0, \quad \mu_1^{(1)} = 0, \quad \eta_1^{(1)} = 0, \quad \xi_1^{(1)} = 0, \quad \varphi_1^{(2)} = 1, \quad \mu_1^{(2)} = 0,$$
$$\eta_1^{(2)} = 0, \quad \xi_1^{(2)} = 0. \tag{12}$$

В формулах (10) и (11) F_1 — значение частного решения $F_1(x)$ в точке $x = l_1$, а D_1 — значение производной $F_1(x)$ в той же точке $x = l_1$. При этом предполагается, что в интервале $0 < x < l_1$ $F_1 \neq 0$. Если окажется, что $F_1(l_1) = 0$, тогда за F_1 следует взять следующее за F_1 значение $F_i(l_i) \neq 0$. Учитывая вид (7), свойства нормальной фундаментальной системы и условия сопряжения (8), будут выполняться следующие рекуррентные зависимости:

$$A_{i+1} = X_{i+1}(l_1) = X_i(l_i) = A_i S_i(b_i) + B_i T_i(b_i) + F_1 r_i,$$

где $F_1 r_i = F_i(l_i)$, $b_i = l_i - l_{i-1}$,

$$B_{i+1} = X'_{i+1}(l_i) = X'_i(l_i) - \frac{[m_i\omega^2 X_i(l_i) + P_1 k_i]}{T_0} = A_i S'_i(b_i) +$$

$$+ B_i T'_i(b_i) + D_1\gamma_i - \frac{m_i\omega^2 [A_i S'_i(b_i) + B_i T'_i + F_1 r_i[- P_1 k_i}{T_0}, \tag{13}$$

где $P_1 k_i = P_i$, $D_1\gamma_i = F'_i(l_i)$.

Подставляя в (13) соотношения (10) и (11), найдем рекуррентные формулы:

$$\varphi^{(1)}_{i+1} = \varphi^{(1)}_i S_i(b_i) + \varphi^{(2)}_i T_i(b_i), \quad \mu^{(1)}_{i+1} = \mu^{(1)}_i S_i(b_i) + \mu^{(2)}_i T_i(b_i),$$

$$\eta^{(1)}_{i+1} = \eta^{(1)}_i S_i(b_i) + \eta^{(2)}_i T_i(b_i) + r_i, \quad \xi^{(1)}_{i+1} = \xi^{(1)}_i S_i(b_i) + \xi^{(2)}_i T_i(b_i),$$

$$\varphi^{(2)}_{i+1} = -\varphi^{(1)}_i \left[\lambda_i^2 T_i(b_i) + \frac{m_i\omega^2 S_i(b_i)}{T_0}\right] + \varphi^{(2)}_i \left[S_i(b_i) - \frac{m_i\omega^2 T_i(b_i)}{T_0}\right],$$

$$\mu^{(2)}_{i+1} = -\mu^{(1)}_i \left[\lambda_i^2 T_i(b_i) + \frac{m_i\omega^2 S_i(b_i)}{T_0}\right] + \mu^{(2)}_i \left[S_i(b_i) - \frac{m_i\omega^2 T_i(b_i)}{T_0}\right] - \frac{k_i}{T_0}, \tag{14}$$

$$\eta^{(2)}_{i+1} = -\eta^{(1)}_i \left[\lambda_i^2 T_i(b_i) + \frac{m_i\omega^2 S_i(b_i)}{T_0}\right] + \eta^{(2)}_i \left[S_i(b_i) - \frac{m_i\omega^2 T_i(b_i)}{T_0}\right] - \frac{m_i\omega^2 r_i}{T_0},$$

$$\xi^{(2)}_{i+1} = -\xi^{(1)}_i \left[\lambda_i^2 T_i(b_i) + \frac{m_i\omega^2 S_i(b_i)}{T_0}\right] + \xi^{(2)}_i \left[S_i(b_i) - \frac{m_i\omega^2 T_i(b_i)}{T_0}\right] + \gamma_i.$$

Удовлетворим граничным условиям в точке $x = l_n$, тогда

$$A_{n+1} = X_n(l_n) = B_1\varphi^{(1)}_{n+1} + P_1\mu^{(1)}_{n+1} + F_1\eta^{(1)}_{n+1} + D_1\xi^{(1)}_{n+1} = 0.$$

Отсюда находим, что

$$B_1 = \frac{-(P_1\mu^{(1)}_{n+1} + F_1\eta^{(1)}_{n+1} + D_1\xi^{(1)}_{n+1})}{\varphi^{(1)}_{n+1}}, \tag{15}$$

Здесь $\varphi^{(1)}_{n+1} \neq 0$ [2].

Зная B_1, находим A_i и B_i по формулам (10), (11), а затем и решение уравнения (7). Решением рассматриваемой граничной задачи будет функция $U_i(x, t) = X_i(x)\sin\omega t$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $l_{i-1} < x < l$.

Если на исследуемую систему действуют только дискретные возмущающие силы [2], тогда $A_i = B_1\varphi^{(1)}_i + P_1\mu^{(1)}_i$, $B_i = B_1\varphi^{(2)}_i + P_1\mu^{(2)}_i$, где $B_1 = \dfrac{-P_1\mu^{(1)}_{n+1}}{\varphi^{(1)}_{n+1}}$, а коэффициенты $\varphi^{(k)}_i$, $\mu^{(k)}_i$ $(k = 1,2)$ вычисляются по рекуррентным формулам (14). В том случае, когда непрерывные возмущающие силы действуют не на всем интервале интегрирования, а только на отдельных участках $(l_{i-1} \leqslant x \leqslant l_i,\ i = 1, 2, \ldots, n)$, тогда метод решения такой граничной задачи остается таким же, как изложено выше, но в интервалах, где не действует возмущение, общее решение вместо вида (7) будет представляться функцией $X_i(x) = A_i S_i(x - l_{i-1}) + B_i T_i(x - l_{i-1})$. Здесь A_i и B_i вычисляются по формулам (10) и (11) с использованием рекуррентных соотношений (14). Предложенный метод решения граничной задачи и найденные рекуррентные соотношения остаются неизменными при условии кусочно - непрерывного распределения возмущающих сил.

Для примера рассмотрим решение граничной задачи установившихся вынужденных колебаний однородной весомой струны

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \; U(0) = U(l) = 0. \tag{16}$$

Для простоты будем предполагать, что дискретных масс и дискретных возмущающих сил не имеется. Пусть $f(x, t) = T_0 \sin \omega t$, тогда после разделения переменных в (16) приходим к граничной задаче

$$X'' + \lambda^2 X = -1, \; X(0) = X(l) = 0. \tag{17}$$

Разделим струну в точке $x = c$ условно на два участка и найдем два решения

$$X_1(x) = A_1 S_1(x) + B_1 T_1(x) + F_1(x) \quad (0 < x < c),$$

$$X_2(x) = A_2 S_2(x - c) + B_2 T_2(x - c) + F_2(x) \quad (c < x < l).$$

Из свойств нормальной фундаментальной системы и граничных условий следует, что $A_1 = 0$. Пользуясь (15), находим

$$B_1 = \frac{-[F_1(l_1) \cdot \eta_3^{(1)} + D_1 \xi_3^{(1)}]}{\varphi_3^{(1)}} = \frac{(1 - \cos \lambda l)}{\lambda \sin \lambda l},$$

где

$$F_1(x) = \int_0^x \frac{-\sin \lambda (x - t)}{\lambda} dt = \frac{\cos \lambda x - 1}{\lambda^2} \; \left(\lambda = \frac{\omega}{a}\right),$$

$$F_1(l_1) = \frac{\cos \lambda c - 1}{\lambda^2}, \quad D_1 = -\frac{\sin \lambda c}{\lambda},$$

$$\eta_3^{(1)} = \frac{\cos \lambda c \cdot \cos \lambda (l - c) - 1}{\cos \lambda c - 1}, \quad \xi_3^{(1)} = \frac{\sin \lambda (l - c)}{\lambda},$$

$$\varphi_3^{(1)} = \frac{\sin \lambda l}{\lambda}, \quad F_2(x) = \int_c^x \frac{-\sin \lambda (x - t)}{\lambda} dt = \frac{\cos \lambda (x - c) - 1}{\lambda^2}.$$

Из формул (10) и (11) вычисляем A_2 и B_2:

$$A_2 = \frac{(1 - \cos \lambda l) \sin \lambda c}{\lambda^2 \sin \lambda l} + \frac{\cos \lambda c - 1}{\lambda^2},$$

$$B_2 = \frac{(1 - \cos \lambda l) \cos \lambda c}{\lambda \sin \lambda l} - \frac{\sin \lambda c}{\lambda}.$$

Зная B_1, A_2, B_2, $F_1(x)$ и $F_2(x)$, находим

$$X_1(x) = \frac{(1 - \cos \lambda l) \sin \lambda x}{\lambda^2 \sin \lambda l} + \frac{\cos \lambda x - 1}{\lambda^2} \quad (0 < x < c),$$

$$X_2(x) = \frac{(1 - \cos \lambda l) \sin \lambda x}{\lambda^2 \sin \lambda l} + \frac{\cos \lambda x - 1}{\lambda^2} \quad (c < x < l), \tag{18}$$

где $X_1(0) = 0$, $X_2(l) = 0$, $X_1(c) = X_2(c)$. Непосредственно из уравнения (17) следует, что частное решение $F_r = \frac{1}{\lambda^2} \left(\lambda^2 = \frac{\omega^2}{a^2} \right)$, тогда решением граничной задачи (17) будет функция

$$X(x) = \frac{(1 - \cos \lambda l) \sin \lambda x}{\lambda^2 \sin \lambda l} + \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2},$$

аналогичная найденному решению (18) по рекуррентным формулам.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, Гостехиздат, М., 1952.
2. К. Я. Кухта, О решении неоднородной граничной задачи с непрерывно-дискретными параметрами при дискретных возмущениях, УМЖ, т. 24, № 6, 1972.
3 В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, «Наука», М., 1965.

Поступила 19.II 1973 г.
Институт геотехнической механики АН УССР