УДК 517.944

Об обобщенной системе уравнений тепло- и массопереноса

М. П. Ленюк, В. В. Федорук

Рассмотрим обобщенную однородную систему уравнений тепло- и массопереноса [1], которая описывает перенос тепла и массы при высокоинтенсивных нестационарных процессах

$$C\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B\frac{\partial u}{\partial t} = A\Delta u, \tag{1}$$

где

$$C = \begin{pmatrix} c_1^2 & 0 \\ 0 & c_2^2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1^2 & 0 \\ 0 & b_2^2 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \; \Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}, \; u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

c_1, c_2, b_1, b_2 — действительные постоянные; $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$. При $C = 0$ получаем обычную параболическую систему, а при $B = 0$ — обычную гиперболическую систему.

Методом интегрального преобразования Фурье по $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ строится фундаментальная матрица решений (ф. м. р.) задачи Коши, т. е. решение системы (1), что удовлетворяет условиям

$$u|_{t=0} = 0, \; \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \delta(x - \xi) E_2^2,$$

δ — функция Дирака, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, E_2^2— единичная матрица размерности 2×2.

1. Систему (1) при помощи дифференциальной матрицы [2]

$$Q = \begin{pmatrix} c_2^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + b_2^2\frac{\partial}{\partial t} - a_{22}\Delta & 0 \\ a_{21}\Delta & c_1^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + b_1^2\frac{\partial}{\partial t} - a_{11}\Delta \end{pmatrix}$$

заменой $u = Qv$ приведем к уравнению

$$F\left(\Delta, \frac{\partial}{\partial t}\right) v = \left(c_1^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + b_1^2 \frac{\partial}{\partial t} - a_{11}\Delta\right)\left(c_2^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + b_2^2 \frac{\partial}{\partial t} - a_{22}\Delta\right) v = 0. \quad (2)$$

Фундаментальное решение задачи Коши $G_0(t, R)$ для уравнения (2) имеет вид

$$G_0(t, R) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \int_0^\infty v(t, \lambda)\, \lambda^{n-1} j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda R)\, d\lambda,$$

где ω_n — площадь единичной сферы в n-мерном пространстве, R — евклидово расстояние между точками x и ξ, $v(t, \lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{zt}dz}{F(-\lambda^2, z)}$, γ — замкнутый контур в z-плоскости, что охватывает все корни уравнения $F(-\lambda^2, z) = 0$, j_ν — «нормированная» функция Бесселя.

Применив матрицу Q к $G_0(t, R)$, получим в образах Фурье искомую ф. м. р. задачи Коши

$$\widetilde{G}(t, \lambda) = \begin{pmatrix} \widetilde{G}_{11} & 0 \\ \widetilde{G}_{21} & \widetilde{G}_{22} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где

$$\widetilde{G}_{ii} = 2c_i^2 e^{-\frac{b_i^2 t}{2c_i^2}} \frac{\sin \sqrt{4a_{ii}c_i^2\lambda_2 - b_i^4}\,\frac{t}{2c_i^2}}{\sqrt{4a_{ii}c_i^2\lambda^2 - b_i^4}}, \quad i = 1, 2,$$

$$\widetilde{G}_{21} = \frac{\widetilde{\psi}(t, \lambda)}{k^2 - \lambda^2} - \frac{a_{21}c_1^2c_2^2}{a_{11}c_1^2 - a_{22}c_2^2}(\widetilde{G}_{11} - \widetilde{G}_{22}), \quad k^2 = \frac{(c_2^2b_1^2 - c_1^2b_2^2)(a_{11}b_2^2 - a_{22}b_1^2)}{(a_{11}c_2^2 - a_{22}c_1^2)^2},$$

$$\widetilde{\psi}(t, R) = \frac{a_{21}ac_1^2c_2^2}{a_{11}c_2^2 - a_{22}c_1^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\widetilde{G}_{11} - \widetilde{G}_{22}) + a\left(\frac{a_{11}\widetilde{G}_{11}}{c_1^2} - \frac{a_{22}\widetilde{G}_{22}}{c_2^2}\right)\right],$$

$$a = \frac{c_2^2b_1^2 - c_1^2b_2^2}{a_{11}c_2^2 - a_{22}c_1^2}.$$

Ф. м. р. задачи Коши для системы (1) имеет вид

$$G(t, R) = \begin{pmatrix} G_{11} & 0 \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где

$$G_{ii} = \frac{\omega_n c_i^n}{(2\pi)^n a_{ii}^n} e^{\frac{-b_i^2 t}{2c_i^2}} \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left[\left(\frac{a_{ii}^2t^2}{c_i^2} - R^2\right)^{\frac{n-1}{2}} \times\right.$$

$$\left.\times \int_0^1 \frac{(1-\alpha^2)^{\frac{n-2}{2}} \operatorname{ch} \frac{b_i^2}{2a_{ii}c_i}\sqrt{\frac{a_{ii}^2t^2}{c_i^2} - R^2}\,\alpha d\alpha}{\left[R^2 + \alpha^2\left(\frac{a_{ii}^2t^2}{c_i^2} - R^2\right)\right]^{\frac{n-1}{2}}} j\left(\frac{a_{ii}t}{c_i} - R\right)\right], \quad i = 1, 2,$$

$$G_{21}=\frac{a_{21}c_1^2c_2^2}{a_{22}c_2^2-a_{11}c_1^2}(G_{11}-G_{22})+$$

$$+\omega_n\int_0^\infty \mathrm{T}(\sqrt{R^2+r^2-2rR\cos\theta})\,\psi(t,r)\,r^{n-1}dr,$$

$\mathrm{T}(R)$ — решение уравнения $(\Delta+k^2)\,u=\delta$ [3], θ — угол между векторами x и ξ, $j(\tau)$ — функция Хевисайда.

2. Если в (4) положить $b_1=b_2=0$, то получим ф. м. р. задачи Коши для гиперболической системы. Ф. м. р. задачи Коши параболической системы невозможно получить из (4), устремив c_1 и c_2 к нулю. Обозначим через T, T_1, T_2 соответственно матрицы

$$\begin{pmatrix}\frac{b_1^2}{c_1^2} & 0\\ 0 & \frac{b_2^2}{c_2^2}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\frac{b_1^2}{c_1^2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{b_2^2}{c_2^2}\end{pmatrix}.$$

Оказывается, что имеет место следующая теорема.

Теорема. а) *Если в* (1) *положить* $C=0$, *то ф. м. р. задачи Коши* $G_n(t,R)$ *параболической системы связано с* $G(t,R)$ *равенством*

$$\lim_{\substack{c_1\to 0\\ c_2\to 0}} G(t,R)\,T=G_n(t,R);\tag{5}$$

б) *если в* (1) *положить* $c_1=0$, *то ф. м. р. задачи Коши* $G_{n,1}(t,R)$ *полученной системы связана с* $G(t,R)$ *равенством*

$$\lim_{c_1\to 0} G(t,R)\,T_1=G_{n,1}(t,R);\tag{6}$$

в) *если в* (1) *положить* $c_2=0$, *то ф. м. р. задачи Коши* $G_{n,2}(t,R)$ *полученной системы связано с* $G(t,R)$ *равенством*

$$\lim_{c_2\to 0} G(t,R)\,T_2=G_{n,2}(t,R).\tag{7}$$

Доказательство. В силу непрерывности оператора Фурье достаточно убедиться в справедливости равенств (5)—(7) в образах, доказательство которых приводится к вычислению предела

$$\lim_{c_i\to 0}\frac{b_i^2}{c_i^2}G_{ii}=\lim_{c_i\to 0}2b_i^2e^{-\frac{b_i^2t}{2c_i^2}}\frac{\sin\sqrt{4a_{ii}c_i^2\lambda^2-b_i^4}\,\frac{t}{2c_i^2}}{\sqrt{4a_{ii}c_i^2\lambda^2-b_i^4}}=e^{-\frac{a_{ii}\lambda^2}{b_i^2t}}$$

Если $c_1=c_2$, $b_1=b_2$, то $a=0$, $k=0$, $\psi(t,R)=0$ и ф. м. р. задачи Коши имеет вид

$$G(t,R)=\begin{pmatrix}G_{11} & 0\\ \frac{a_{21}c_1^2c_2^2}{a_{11}c_1^2-a_{22}c_2^2}(G_{22}-G_{11}) & G_{22}\end{pmatrix}.$$

В случае $a_{21}=0$ система (1) распадается на два отдельных уравнения и ф. м. р. задачи Коши имеет диагональный вид.

Выпишем ф. м. р. задачи Коши для частных случаев размерности пространства геометрических переменных

$$G_{ii}(t, R) = \frac{c_i^2}{2a_{ii}\pi} e^{-\frac{b_i^2 t}{2c_i^2}} \frac{\operatorname{ch} \frac{b_i^2}{2c_i^2}\sqrt{t^2 - \frac{c_i^2 R^2}{a_{ii}^2}}}{\sqrt{t^2 - \frac{c_i^2 R^2}{a_{ii}^2}}} j\left(t - \frac{c_i R}{a_{ii}}\right) \quad \text{при } n = 2,$$

$$G_{ii}(t, R) = \frac{c_i^3}{4\sqrt{a_{ii}^3}\pi t} e^{-\frac{b_i^2 t}{2c_i^2}} \frac{\partial}{\partial t} I_0\left(\frac{b_i^2}{2c_{ii}^2}\sqrt{t^2 - \frac{c_i^2 R^2}{a_{ii}^2}}\right) j\left(t - \frac{c_i R}{a_{ii}}\right)$$
$$\text{при } n = 3,$$

где $I_0(z)$ — функция Бесселя мнимого аргумента.

Известно [4], что решение системы (1), удовлетворяющее условиям

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x), \tag{8}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — одноколонные матрицы, записывается так:

$$u(t, x) = G*\psi + \frac{\partial G}{\partial t}*\varphi - G*\left[\left(\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}*\varphi\right)\bigg|_{t=0}\right].$$

Поскольку

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}*\varphi\big|_{t=0} = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{c_1^2}\Delta - \frac{b_1^2}{c_1^2}\frac{\partial}{\partial t} & 0 \\ \frac{a_{21}}{c_2^2}\Delta & \frac{a_{22}}{c_2^2}\Delta - \frac{b_2^2}{c_2^2}\frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} G*\varphi\big|_{t=0} = -T\varphi,$$

то решение задачи (1), (8) имеет вид

$$u(t, x) = G*(\psi + T\varphi) + \frac{\partial G}{\partial t}*\varphi. \tag{9}$$

Если в (9) устремить c_1 и c_2 к нулю, учитывая $\lim\limits_{\substack{c_1 \to 0 \\ c_2 \to 0}} \frac{\partial^k G}{\partial t^k} = 0$ $(k=0, 1)$ и (5), то получим решение $u(t, x) = G_n(t, R)*\varphi(x)$ параболической системы, удовлетворяющее условию $u\big|_{t=0} = \varphi(x)$.

Решение неоднородной системы

$$C\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B\frac{\partial u}{\partial t} = A\Delta u + f(t, x),$$

где $f(t, x)$ — одноколонная матрица, записывается через ф. м. р. задачи Коши (4) таким образом:

$$u(t, x) = C^{-1}G(t, R)**f(t, x). \tag{10}$$

Устремив в (10) c_1 и c_2 к нулю, получим решение

$$u(t, x) = B^{-1}G_n(t, R)**f(t, x) \tag{11}$$

системы

$$B\frac{\partial u}{\partial t} = A\Delta u + f(t, x).$$

Матрица-функция $G_n(t, R)$ в формуле (11) равна нулю при $t < 0$. Отметим, что приведенные выше результаты можно получить и в допущении, что $t > 0$, а функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(t, x)$ ограничены.

Замечание 1. Можно рассматривать систему (1) с матрицей $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $a_{12} \neq 0$. Такая система приводится к (1).

Замечание 2. Система

$$C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (B + D) \frac{\partial u}{\partial t} = A \Delta u,$$

где

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_2^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1^2 & 0 \\ 0 & b_2^2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & d^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

заменой искомых функций приводится к системе (1) при $c_1 = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Лыков, Теория теплопроводности, «Высшая школа», М., 1967.
2. М. П. Ленюк, А. Ф. Шестопал, О дважды разветвленном решении задачи Коши одного класса параболических систем, УМЖ, т. 23, № 1, 1971.
3. А. Ф. Шестопал, Разложение по фундаментальным решениям эллиптических операторов, «Наукова думка», К., 1968.
4. Г. Е. Шилов, Математический анализ (второй специальный курс), «Наука», М., 1965.

Поступила 24.III 1972 г.

Черновицкий государственный университет