УДК 517.531

Об областях значений двух функционалов, заданных на C-функциях Каратеодори

А. С. Носенко

Регулярную в круге $|z| < 1$ функцию $p(z)$ будем называть C-функцией Каратеодори, если $\operatorname{Re}\{p(z)\} > 0$ для $|z| < 1$ и $p(0) = 1$. Через P будем обозначать класс всех таких функций.

Комплекснозначные функционалы

$$I(p) = \frac{zp'(z)}{p(z) - 1} \quad \text{и} \quad J(p) = 1 + \frac{zp''(z)}{p'(z)},$$

где $p(z) \in P$, $z = re^{i\varphi}$, $0 < r < 1$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, фиксированно, определены не на всех $p(z) \in P$. Будем считать в дальнейшем значения функционалов $I(p)$ и $J(p)$ равными бесконечности на функциях $p(z) \in P$, для которых соответственно $p(z) = 1$ и $p'(z) = 0$ в рассматриваемой точке $z = re^{i\varphi}$. Вещественные и мнимые части этих функционалов характеризуют поведение образов концентрических окружностей $|z| = r$, $0 < r < 1$, при отображении функциями $p(z) \in P$ круга $|z| < 1$. В [1] было показано, что $\operatorname{Re}\{I(p)\}$ и $\operatorname{Re}\{J(p)\}$ неограничены на классе P, причем на тех функциях $p(z) \in P$, которые привлекались для доказательства этого факта, функционалы $\operatorname{Re}\{I(p)\}$ и $\operatorname{Re}\{J(p)\}$ не принимают значений, принадлежащих определенным отрезкам вещественной оси. Целью данной заметки является доказательство следующей теоремы, обобщающей основные результаты [1].

Теорема. *Какова бы ни была фиксированная точка $z = re^{i\varphi}$, $0 < r < 1$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, значением как функционала $I(p)$, так и $J(p)$ может быть любое число расширенного множества комплексных чисел.*

Из этой теоремы следует, что как вещественные, так и мнимые части функционалов $I(p)$ и $J(p)$ могут быть ограниченными и иметь оценки только на некоторых подклассах класса P, о чем и идет речь в некоторых работах последнего времени. Например, в работе [2] получена нижняя оценка вещественной части функционала $I(p)$ на тех функциях $p(z) \in P$, для которых $|p'(0)| = 2b$, $0 < b < 1$, при $0 \leqslant |z| < b$.

Доказательство теоремы. Функции

$$p(z)=\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}} \tag{1}$$

при каждом значении t, $0<t\leqslant 2\pi$, и

$$p(z)=\frac{1+ze^{-i\xi}}{1-ze^{-i\xi}}\lambda+\frac{1+ze^{-i\eta}}{1-ze^{-i\eta}}(1-\lambda) \tag{2}$$

при каждом значении λ, ξ, η, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, $0\leqslant\xi$, $\eta=1$, как известно, принадлежат классу P. Обозначим через P_1 и P_2 подклассы функций класса P, имеющих соответственно представление (1) и (2). Очевидно, $P_1\subset P_2$.

Без ограничения общности, фиксированной точкой будем считать точку $z=r$, $0<r<1$. Докажем утверждение теоремы для функционала $I(p)$.

Легко видеть, что значениями функционала $I(p)$ на функциях $p(z)\in P_1$ являются все точки окружности L с центром в точке $a=\frac{1}{1-r^2}$ и радиусом $\rho=\frac{r}{1-r^2}$ и только точки этой окружности.

На функциях $p(z)\in P_2$ имеем

$$I(p)=\frac{(A-B)\lambda+B}{(C-D)\lambda+D}, \tag{3}$$

где

$$A=\frac{2re^{-i\xi}}{(1-re^{-i\xi})^2},\quad B=\frac{2re^{-i\eta}}{(1-re^{-i\eta})^2},$$

$$C=\frac{2re^{-i\xi}}{1-re^{-i\xi}},\quad D=\frac{2re^{-i\eta}}{1-re^{-i\eta}}. \tag{4}$$

При фиксированных ξ и η, $0\leqslant\xi,\ \eta<2\pi$, $\xi\neq\eta$ — это дуги окружностей, соответствующие отрезку $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ при дробно-линейном отображении (3). Каждая из этих дуг имеет своими концами точки окружности L.

Покажем, что семейство таких дуг, соответствующих значениям параметров $\xi=0$, $0\leqslant\eta<2\pi$, которые будем обозначать через $S_\eta(\lambda)$, покрывает всю расширенную комплексную плоскость.

Действительно,

$$S_\eta\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(1-re^{-i\eta})^2+e^{-i\eta}(1-r)^2}{(1-r)(1-re^{-i\eta})[1+e^{-i\eta}(1-2r)]}.$$

Расстояние этой точки от центра a окружности L равно

$$\left|S_\eta\left(\frac{1}{2}\right)-a\right|=\rho\,|\varphi(\eta)|, \tag{5}$$

где

$$|\varphi(\eta)|=\frac{5r^2-4r^3+r^4-(6r-5r^2+4r^3-r^4)\cos\eta+2(1-r+r^2)\cos^2\eta}{1-2r+3r^2-2r^3+2r^4+(1-4r+5r^2-6r^3)\cos\eta+2r(2r-1)\cos^2\eta}.$$

Разность между знаменателем и числителем последней дроби можно представить в виде

$$8(1-r^2)\sin^2\frac{\eta}{2}\left[\cos^2\frac{\eta}{2}-\frac{(1+r)^2}{4}\right]. \tag{6}$$

Из (5) и (6) видно, что при $|\cos\eta| > \frac{1+r}{2} \, |\varphi(\eta)| < 1$, следовательно, точка $S_\eta\left(\frac{1}{2}\right)$, а вместе с ней и вся дуга $S_\eta(\lambda)$ расположены в круге $K: |S-a| < \rho$, ограниченном окружностью L. При $\left|\cos\frac{\eta}{2}\right| < \frac{1+r}{2}$ $|\varphi(\eta)| < 1$, следовательно, точка $S_\eta\left(\frac{1}{2}\right)$ и дуга $S_\eta(\lambda)$ расположены вне круга K. Концами этих дуг всегда являются точки окружности L; одним из них есть точка $\frac{1}{1-r}$.

Центр дуги $S_\eta(\lambda)$ расположен в точке $\zeta = \frac{A\bar{D}-B\bar{C}}{C\bar{D}-D\bar{C}}$, где A, B, C и D из (4). Расстояние точки ζ от центра a окружности L равно

$$|\zeta - a| = \rho|\psi(\eta)|, \tag{7}$$

где

$$|\psi(\eta)| = \frac{\left|\cos^2\frac{\eta}{2} - \frac{(1+r)^2}{4}\right|}{\left|\cos\frac{\eta}{2}\right|\sqrt{\frac{(1+r)^2}{4} - r\cos^2\frac{\eta}{2}}}. \tag{8}$$

Обозначим $\alpha(r) = 2\arccos\frac{1+r}{2}$. При малых значениях параметра η, как следует из (7) и (8), центр дуги $S_\eta(\lambda)$ находится от точки a на расстоянии, близком к $\rho\frac{3+r}{2} < \frac{3}{2}\rho$, т. е. вне круга K, а концы дуги $S_\eta(\lambda)$ могут быть сколь угодно близкими между собой точками. Сама дуга $S_\eta(\lambda)$ расположена в круге K.

При возрастании параметра η, $0 < \eta < \alpha(r)$, центр дуги $S_\eta(\lambda)$ приближается к центру a окружности L, а расстояние между концами дуги возрастает. Наконец, при $\eta = \alpha(r)$ центр дуги $S_\eta(\lambda)$ совпадает с центром a окружности L, а сама дуга совпадает с частью окружности L.

Отсюда и из непрерывности следует, что при возрастании параметра η от $\eta = 0$ до $\eta = \alpha(r)$ семейство круговых дуг $S_\eta(\lambda)$ полностью покрывает круг K.

При дальнейшем возрастании параметра η от $\eta = \alpha(r)$ до $\eta = \pi$ центр дуги $S_\eta(\lambda)$ непрерывным образом выходит из круга K и уходит в бесконечность, сама дуга расположена вне круга K, одним из концов каждой такой дуги является точка $\frac{1}{1-r}$. Другим концом дуги $S_\eta(\lambda)$ является переменная точка $\frac{1}{1-re^{-i\eta}}$ окружности L, которая при $\eta \to \pi$ приближается к точке $\frac{1}{1+r}$ окружности L. При $\eta = \pi$ дуга $S_\eta(\lambda)$ вырождается в часть вещественной оси, расположенной вне отрезка $\left(\frac{1}{1+r}, \frac{1}{1-r}\right)$. Отсюда и из непрерывности следует, что при возрастании параметра η, $\alpha(r) < \eta, < \pi$. семейство дуг $S_\eta(\lambda)$ полностью покрывает область, расположенную по одну сторону от вещественной оси и вне круга K. Легко убедиться в том, что при $\pi < < \eta < \eta < \pi + \alpha(r)$ семейство дуг $S_\eta(\lambda)$ покрывает область, расположенную по другую сторону от вещественной оси и вне круга K.

Таким образом, при $0 \leqslant \eta < 2\pi$ семейство дуг $S_\eta(\lambda)$ покрывает всю расширенную комплексную плоскость. Очевидно, в классе P найдется бесчисленное множество функций $p(z)$, не принадлежащих подклассам P_1 и P_2, на которых функционал $I(p)$ принимает любое заданное значение.

Справедливость утверждения теоремы относительно функционала $J(p)$ можно доказать при помощи аналогичных рассуждений. На функциях $p(z) \in \in P_1$ его значениями являются точки окружности L^0 с центром $a^0 = \frac{1+r^2}{1-r^2}$ и радиусом $\rho^0 = \frac{2r}{1-r^2}$ и только точки этой окружности. На функциях $p(z) \in P_2$ значения функционала $J(p)$ покрывают всю расширенную комплексную плоскость. Класс P содержит бесчисленное множество функций $p(z)$, на которых функционал $J(p)$ принимает любое заданное значение.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Носенко, О некоторых свойствах отображений единичного круга C-функциями Каратеодори, УМЖ, т. 23, № 6, 1971.
2. V. Singh and R. M. Goel, On radii of convexity and starlikeness of some classe of functions, J. of the Math. Soc. Japan, **23**, N 2, 1971, 323—339.

Поступила 23.III 1972 г.,
после переработки — 13.VIII 1972 г.

Запорожский машиностроительный институт