УДК 517.5

Точные оценки для норм дифференцируемых периодических функций в метрике L_2

В. Ф. Сторчай

Обозначим через $W^{(r)} H_\omega$ $(r = 0, 1, \ldots)$ класс 2π-периодических r раз дифференцируемых функций $f(x)$, у которых модуль непрерывности r-й производной $\omega(f^{(r)}; t)$ $(f^0 = f)$ не превосходит заданного модуля непрерывности $\omega(t)$, и пусть $W_0^{(r)} H_\omega$ — множество функций $f(x)$ из $W^{(r)} H_\omega$, удовлетворяющих условию $\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0$.

В работе [1] доказано, что если $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности, то

$$\sup_{f \in W_0^{(r)} H_\omega} \|f\|_L = \sup_{f \in W_0^{(r)} H_\omega} \int\limits_0^{2\pi} |f(x)|\,dx = 4 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{ir} b_{2i+1}}{(2i+1)^{r+1}} \quad (r = 0, 1, \ldots),$$

где

$$b_m = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(2t) \sin mt\,dt. \tag{1}$$

Решая аналогичную задачу в метрике L_2, используем функцию

$$\Omega_r(t) = \Omega_r(\omega, t) = \sup_{f \in W^{(r)} H_\omega} \max_x |f(x+t) - f(x)|,$$

точное значение которой при каждом $r = 0, 1, \ldots$ и выпуклом $\omega(t)$ найдено в [2].

В этой работе установлено, что для $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

$$\Omega_{2\nu}(t) = 2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_{2i+1} \sin (2i+1) \frac{t}{2}}{(2i+1)^{2\nu}} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots),$$

где b_{2i+1} определены равенствами (1).

Заметим, что $\Omega_0(t) = \omega(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$. Функция $\Omega_r(t)$ $(r = 0, 1, \ldots)$ обладает следующими свойствами:

1) $\Omega_r(t)$ монотонно возрастает на $(0, \pi)$;

2) $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 2\pi} \Omega_r(t) = \Omega_r(\pi)$;

3) $\Omega_r(\pi + t) = \Omega_r(\pi - t)$.

Основной результат статьи базируется на следующем утверждении.

Теорема 1. *Если $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности, $b - a \leqslant 2\pi$, то для любой $f \in W^{(r)} H_\omega$ такой, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$, имеем*

$$\int\limits_a^b f^2(x)\,dx \leqslant \frac{1}{4} \int\limits_0^{b-a} \Omega_r^2(t)\,dt. \tag{2}$$

Оценка на классе $W^{(r)} H_\omega$ для $r = 2\nu$ — точная.

Доказательство теоремы 1 будет основываться на следующих леммах.

Лемма 1. *Пусть функция* $f(x) \in W^{(r)}H_\omega$ $(r = 0, 1, \ldots)$ *на множестве* $E = (a, b) \cup (c, d)$ $(a < b \leqslant c < d,\ d - a \leqslant 2\pi)$ *удовлетворяет следующему условию: функция* $F_1(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ *строго возрастает (убывает) на* (a, b), *а функция* $F_2(x) = \int\limits_c^x f(t)\,dt$ *строго убывает (возрастает) на* (c, d), *причем* $F_1(b) = -F_2(d)$. *Тогда*

$$\int\limits_E f^2(x)\,dx \leqslant \frac{1}{4} \int\limits_{c-b}^{d-a} \Omega_r^2(t)\,dt.$$

Доказательство. Определим функцию $\rho(x)$ на отрезке $[a, b]$ с помощью равенств

$$F_1(x) = F_2(\rho(x)) + F_1(b) \qquad (a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant \rho(x) \leqslant d) \tag{3}$$

и будем считать для определенности, что $f(x) \geqslant 0$ на (a, b). Обозначаем $M(f) = \int\limits_E f^2(t)\,dt = \int\limits_a^b f^2(t)\,dt + \int\limits_c^d f^2(t)\,dt$. Замена переменной $t = \rho(u)$ во втором интеграле дает $\int\limits_c^d f^2(t)\,dt = -\int f^2[\rho(u)]\,\rho'(u)\,dv$ поэтому $M(f) = \int\limits_a^b [f^2(t) - f^2(\rho(t))\,\rho'(t)]\,dt$.

Прибавляя и вычитая под знаком интеграла функции $f^2(t)\,\rho'(t)$, $f^2(\rho(t))$, $f(t)\,f(\rho(t))\,[1 - \rho'(t)]$, можно получить следующие выражения для $M(f)$:

$$M(f) = \int\limits_a^b f^2(t)\,[1 - \rho'(t)]\,dt + \int\limits_a^b [f^2(t) - f^2(\rho(t))]\,\rho'(t)\,dt,$$

$$M(f) = \int\limits_a^b f^2(\rho(t))\,[1 - \rho'(t)]\,dt + \int\limits_a^b [f^2(t) - f^2(\rho(t))]\,dt,$$

$$M(f) = -\int\limits_a^b f(t)\,f(\rho(t))\,[1 - \rho'(t)]\,dt +$$

$$+ \int\limits_a^b \{f^2(t) - f^2(\rho(t))\,\rho'(t) + f(t)\,f(\rho(t))\,[1 - \rho'(t)]\}\,dt.$$

Складывая правые и левые части этих выражений, причем последнее дважды, получим

$$4M(f) = \int\limits_a^b [f(\rho(t)) - f(t)]^2\,[1 - \rho'(t)]\,dt +$$

$$+ \int\limits_a^b \{[f^2(t) - f^2(\rho(t))]\,[1 + \rho'(t)] + 2f^2(t) - 2f^2(\rho(t))\,\rho'(t) +$$

$$+ 2f(t)\,f(\rho(t))\,[1 - \rho'(t)]\}\,dt = I_1 + I_2.$$

Из равенства (3) следует, что для $t \in (a, b)$ $f(t) = f(\rho(t))\rho'(t)$, и так как $f(x) \leqslant 0$ для $x \in (c, d)$, то

$$I_2 = \int_a^b f^2(\rho(t))[1 + \rho'(t)]^2[\rho'(t) - 1] \leqslant 0.$$

Следовательно,

$$M(f) \leqslant \frac{1}{4}\int_a^b [f(\rho(t)) - f(t)]^2 [1 - \rho'(t)]\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\int_a^b \Omega_r^2(\rho(t) - t)[1 - \rho'(t)]\, dt = \frac{1}{4}\int_{c-b}^{d-a} \Omega_r^2(t)\, dt.$$

Лемма 2. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *задана непрерывная функция* $f(x)$ $(f(x) \not\equiv 0)$ *и*

$$\int_a^b f(x)\, dx = 0. \tag{4}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *существует такое множество* $E = E(\varepsilon) \subset (a, b)$, *состоящее из конечного числа интервалов, что*

$$|f(x)| > 0, \quad x \in E, \tag{5}$$

$$\int_E f(x)\, dx = 0, \tag{6}$$

$$\int_{Q=(a,b)-E} |f(x)|^p\, dx < \varepsilon \qquad (0 < p < \infty). \tag{7}$$

При $p = 1$ это утверждение содержится в [1]. Доказательство для случая $p \neq 1$ аналогично, но его приведем ради полноты изложения.

Доказательство. Обозначим через E^+ и E^- множество точек x из (a, b), в которых соответственно $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$. Так как функция $f(x)$ непрерывна, то $E^+ = \bigcup_k \Delta_k^+$, а $E^- = \bigcup_i \Delta_i^-$, где $\Delta_k^+ = (x_k^+, x_{k+1}^+)$ и $\Delta_i^- = (x_i^-, x_{i+1}^-)$ — интервалы, на которых соответственно $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$ и $f(x_k^+) = f(x_{k+1}^+) = f(x_i^-) = f(x_{i+1}^-) = 0$.

В случае бесконечного числа интервалов (для конечного справедливость леммы очевидна) для произвольного $\varepsilon > 0$ всегда можно указать такие номера r и ν, что будут выполняться неравенства

$$\sum_{k=r+1}^{\infty} \int_{\Delta_k^+} f^p(x)\, dx < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_{i=\nu+1}^{\infty} \int_{\Delta_i^-} |f(x)|^p\, dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть

$$S_r^+(f) = \sum_{k=1}^{r} \int_{\Delta_k^+} f(x)\, dx, \quad S_\nu^-(f) = \sum_{i=1}^{\nu} \int_{\Delta_i^-} f(x)\, dx,$$

а $G(\varepsilon)$ — множество интервалов $\Delta_1^+, \Delta_2^+, \ldots, \Delta_r^+, \Delta_1^-, \Delta_2^-, \ldots, \Delta_\nu^-$. Если $\int_{G(\varepsilon)} f(x)\, dx = 0$, то утверждение леммы справедливо, так как $\int_{(a,b)-G(\varepsilon)} |f(x)|^p\, dx < \varepsilon$, а $G(\varepsilon)$ — искомое множество $E(\varepsilon)$.

Пусть теперь для определенности

$$\int\limits_{G(\varepsilon)} f(x)\,dx = S_r^+(f) + S_\nu^-(f) > 0.$$

В силу условия (4) существует натуральное число $m > \nu$ такое, что $S_r^+(f) + S_{m-1}^-(f) > 0$, но $S_r^+(f) + S_m^-(f) < 0$. Тогда из этих неравенств получаем, что

$$b_1 = -\int\limits_{x_m^-}^{x_{m+1}^-} f(x)\,dx > S_r^+(f) + S_m^-(f) = a_1 > 0.$$

Из непрерывности функции $f(x)$ следует непрерывность функции $\varphi(x) = \int\limits_{x_m^-}^{x} f(t)dt$, значения которой расположены на отрезке $[0,\ b_1]$. Поэтому существует такое $x = x^-(x_m^- < \bar{x} < x_{m+1}^-)$, что $\varphi(\bar{x}) = a_1$ $(b_1 > a_1)$.

Обозначим через $E(\varepsilon)$ совокупность интервалов $\Delta_1^+, \Delta_2^+, \ldots, \Delta_r^+, \Delta_1^-, \Delta_2^-, \ldots, \Delta_{m-1}^-, (x_m^-, \bar{x})$. Тогда

$$\int\limits_{(a,b)-E(\varepsilon)} |f(x)|^p\,dx = \sum_{k=r+1}^{\infty} \int\limits_{\Delta_k^+} f^p(x)\,dx + \sum_{i=m+1}^{\infty} \int\limits_{\Delta_i^-} |f(x)|^p dx +$$

$$+ \int\limits_{\bar{x}}^{x_{m+1}^-} |f(x)|^p\,dx < \varepsilon, \quad \int\limits_{E(\varepsilon)} f(x)\,dx =$$

и $|f(x)| > 0$ для всех $x \in E(\varepsilon)$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть функция $g(x)$ на множестве $E \subset (a,\ b)$ $(b - a \leqslant 2\pi)$, состоящем из конечного числа интервалов, не обращается в нуль и совпадает с $f(x) \in W^{(r)}H_\omega$, $g(x) = 0$ в остальных точках интервала $(a,\ b)$, а функция $F(x) = \int\limits_a^x g(t)\,dt$ знакопостоянна на $(a,\ b)$ и $F(b) = 0$. Тогда*

$$\int\limits_a^b g^2(x)\,dx \leqslant \frac{1}{4} \int\limits_0^{b-a} \Omega_r^2(t)\,dt.$$

Доказательство. Пусть α — наименьший, а β — наибольший из нулей функции $F(x) - y_0$ на (a, b), где y_0 — наименьшее среди таких чисел y $(0 < y < \max\limits_x F(x))$, что функция $F(x) - y$ имеет на (a, b) больше двух нулей. В силу выбора числа y_0 на промежутке (α, β) имеется конечное число попарно непересекающихся интервалов (a_k, b_k) $(k = 1, 2, \ldots, n)$, на каждом из которых $F_1(x) = \int\limits_\alpha^x g(t)\,dt > 0$ и вне которых $F_1(x) = 0$ на (α, β).

Проводя рассуждения аналогично тому, как это делалось в [1], установим, что

$$\int\limits_{a_k}^{b_k} g^2(t)\,dt \leqslant \frac{1}{4} \int\limits_0^{b_k - a_k} \Omega_r^2(t)\,dt, \tag{8}$$

и для доказательства леммы нужно доказать неравенство

$$\int_{\alpha}^{\beta} g^2(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} g^2(t)\,dt \leqslant \frac{1}{4} \int_{0}^{\beta-\alpha} \Omega_r^2(t)\,dt. \tag{9}$$

Если $b - a \leqslant \pi$, то в силу соотношения (8) и первого свойства функции $\Omega_r(t)$

$$\int_{\alpha}^{\beta} g^2(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} g^2(t)\,dt \leqslant \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \int_{0}^{b_k-a_k} \Omega_r^2(t)\,dt \leqslant \frac{1}{4} \int_{0}^{\beta-\alpha} \Omega_r^2(t)\,dt, \tag{10}$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь случай $b - a > \pi$. Всегда существует такое натуральное число m, что

$$\alpha_1 = \sum_{\iota=1}^{m-1} (b_k - a_k) \leqslant \pi, \quad \text{а} \quad a_2 = \sum_{k=1}^{m} (b_k - a_k) > \pi.$$

Используя соотношения (8), (10) и свойства функции $\Omega_r(t)$, получим

$$\int_{\alpha}^{\beta} g^2(t)\,dt \leqslant \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{m-1} \int_{0}^{b_k-a_k} \Omega_r^2(t)\,dt + \frac{1}{4} \sum_{k=m}^{n} \int_{0}^{b_k-a_k} \Omega_r^2(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4} \int_{0}^{\alpha_1} \Omega_r^2(t)\,dt + \frac{1}{4} \int_{0}^{\beta-\alpha-\alpha_1} \Omega_r^2(t)\,dt \leqslant \frac{1}{4} \int_{0}^{\beta-\alpha} \Omega_r^2(t)\,dt.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Из леммы 2 следует, что каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно указать такое множество $E(\varepsilon) \subset (a, b)$, состоящее из конечного числа интервалов, что выполняются соотношения (5)—(7). Зафиксируем E и определим $g(x)$ равенством

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E, \\ 0, & x \in Q. \end{cases} \tag{11}$$

Положим $F(x) = \int_{a}^{x} g(t)\,dt$. Тогда из соотношения (6) и (11) следует, что $F(b) = 0$, а множество точек $x \in (a, b)$, в которых $F(x) \neq 0$, состоит из интервалов (a_k, b_k) $(k = 1, 2, \ldots, n)$, удовлетворяющих условиям

$$F(a_k) = F(b_k) = 0, \quad |F(x)| > 0 \ (a_k \leqslant x \leqslant b_k).$$

Применяя к каждому из этих интервалов лемму 3, получим

$$\int_{a}^{b} g^2(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} g^2(x)\,dx \leqslant \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \int_{0}^{b_k-a_k} \Omega_r^2(t)\,dt \leqslant \frac{1}{4} \int_{0}^{b-a} \Omega_r^2(t)\,dt.$$

Тогда

$$\int_{a}^{b} f^2(x)\,dx = \int_{a}^{b} g^2(x)\,dx + \int_{Q} f^2(x)\,dx < \frac{1}{4} \int_{0}^{b-a} \Omega_r^2(t)\,dt + \varepsilon.$$

Так как ε — число сколь угодно малое, то неравенство (2) справедливо.

Покажем теперь, что при каждом $r = 2\nu$ ($\nu = 0, 1, \ldots$) существует в классе $W^{(r)}H_\omega$ функция, удовлетворяющая условиям теоремы, для которой в соотношении (2) имеет место знак равенства. Для этого используем экстремальную функцию из [2].

Обозначим через $f_{2\nu}(x)$ функцию из класса $W_0^{(2\nu)}H_\omega$, у которой производная порядка $r = 2\nu$ нечетна, причем

$$f_{2\nu}^{(2\nu)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\omega(2x), & 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2}\omega(2\pi - 2x), & \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Легко проверить, что

$$f_{2\nu}(x) = (-1)^\nu \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_{2i+1}}{(2i+1)^{2\nu}} \sin(2i+1)x,$$

где b_{2i+1} (коэффициенты Фурье функции $f_{2\nu}^{(2\nu)}(x)$) определены равенствами (1).

Пусть фиксирован отрезок $[a, b]$, $b - a \leqslant 2\pi$. Функция $\varphi_0(x) = f_{2\nu}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$ принадлежит классу $W^{(2\nu)}H_\omega$ и

$$\int_a^b \varphi_0(x)\,dx = \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f_{2\nu}(x)\,dx = 0.$$

Кроме того,

$$\int_a^b \varphi_0^2(x)\,dx = 2\int_0^{\frac{b-a}{2}} f_{2\nu}^2(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{b-a} \Omega_{2\nu}^2(t)\,dt.$$

Если в теореме 1 положить $a = 0$, $b = 2\pi$, то приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Каков бы ни был выпуклый модуль непрерывности $\omega(t)$, имеет место равенство*

$$\sup_{f \in W_0^{(2\nu)}H_\omega} \|f\|_{L_2}^2 = \sup_{f \in W_0^{(2\nu)}H_\omega} \int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx = \pi \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_{2i+1}^2}{(2i+1)^{4\nu}} = \|f_{2\nu}\|_{L_2}^2 \quad (\nu = 0, 1 \ldots).$$

Пусть $W^{(r)}K$ ($r = 1, 2, \ldots$) — класс 2π-периодических функций $f(x)$, у которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна и $|f^{(r)}(x)| \leqslant K$.

Тогда имеет место следующее утверждение.

Следствие. *Если $f(x) \in W_0^{(2\nu+1)}K$ ($\nu = 0, 1, \ldots$), то имеют место соотношения*

$$\sup_{f \in W_0^{(2\nu+1)}K} \|f\|_{L_2}^2 = \frac{16K^2}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^{4\nu+4}}.$$

Справедливость этого утверждения вытекает из совпадения классов $W^{(r)}K$ и $W_0^{(r-1)}H_\omega$ при $\omega(t) = Kt$.

В заключение выражаю благодарность Н. П. Корнейчуку за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. П. Корнейчук, Точные оценки для норм дифференцируемых периодических функций в метрике L, Математические заметки, т. 2, вып. 6, 1967.
2. М. П. Корнійчук, Про екстремальні властивості періодичних функцій, ДАН УРСР, № 8, 1962.

Поступила 8.II 1973 г.
Днепропетровский государственный университет