УДК 517.94:518.12

О «реверсивных» методах интегрирования систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

А. И. Ткаченко

При решении на ЭЦВМ систем обыкновенных дифференциальных уравнений в некоторых случаях удается использовать частные свойства решаемых уравнений для повышения точности интегрирования без существенного увеличения объема вычислений. В данной статье рассматривается один из таких случаев.

1. Пусть необходимо решать с малым фиксированным шагом h задачу Коши для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = A(t)\,X. \tag{1}$$

Здесь X — вектор искомых переменных $x_1, \ldots, x_n$; $A = \| a_{ij} \|$ — матрица с размерами $n \times n$, все элементы главной диагонали которой равны нулю:

$$a_{ii} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Точка означает дифференцирование по аргументу t.

Будем полагать, что информацией для решения рассматриваемой задачи на $k+1$-м шаге служат приращения $b_{ij,\,k+1}$ интегралов от элементов матрицы A на этом шаге, образующие матрицу B_{k+1}:

$$b_{ij,k+1} = \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} a_{ij}dt \qquad (t_{k+1} = t_k + h). \tag{3}$$

Простейший пример такого рода вычислений — нахождение значений функций $x_1 = \sin \varphi(t)$; $x_2 = \cos \varphi(t)$ по приращениям угла φ на шаге путем интегрирования системы уравнений

$$\dot{x}_1 = \dot{\varphi} x_2, \qquad \dot{x}_2 = -\dot{\varphi} x_1. \tag{4}$$

Другой пример — определение ориентации твердого тела путем интегрирования системы уравнений, именуемых в теоретической механике уравнениями Пуассона.

Простейший метод интегрирования системы (1) выражается формулой

$$X_{k+1} = (E + B_{k+1}) X_k, \tag{5}$$

где X_k, X_{k+1} — вычисленные значения X в начале и конце $k+1$-го шага; E — единичная матрица с размерами $n \times n$. Полагая элементы матрицы A трижды непрерывно дифференцируемыми функциями t, представим погрешность метода (5) на $k+1$-м шаге в виде

$$\delta X_{k+1}(h, X_k) = -\left[\frac{1}{2} A_k^2 h^2 + \frac{1}{6}(A_k^3 + A_k \dot{A}_k + 2\dot{A}_k A_k) h^3\right] X_k + 0(h^4). \tag{6}$$

Предположим теперь, что формула (5) реализуется следующим образом: на каждом нечетном (первом, третьем и т. д.) шаге значения компонент вектора X, найденные в порядке нумерации, используются для вычисления остальных компонент вектора X на этом же шаге

$$x_{m,k+1} = x_{mk} + \sum_{j=1}^{m-1} b_{mj,k+1} x_{j,k+1} + \sum_{j=m+1}^{n} b_{mj,k+1} x_{jk}$$

$$(m = 1, 2, \ldots, n; \qquad k = 0, 2, 4, \ldots). \tag{7}$$

На четных же шагах вычисление компонент вектора X и замещение значений этих компонент в начале шага найденными значениями производится в последовательности, обратной порядку нумерации:

$$x_{n-m,k+2} = x_{n-m,k+1} + \sum_{j=1}^{n-m-1} b_{n-m,j,k+2} x_{j,k+1} + \sum_{i=n-m+1}^{n} b_{n-m,j,k+2} x_{j,k+2} \tag{8}$$

$$(m = 0, 1, \ldots, n-1; \qquad k = 0, 2, 4, \ldots).$$

Такие схемы вычислений известны под названием «реверсивных».

Введем матрицы C_k, D_k, $F(t)$, $G(t)$ с размерами $n \times n$, определив их элементы следующим образом:

$$c_{ij,k} = \begin{cases} 0 & (i \leqslant j), \\ b_{ij,k} & (i > j), \end{cases} \qquad d_{ij,k} = \begin{cases} b_{ij,k} & (i < j), \\ 0 & (i \geqslant j), \end{cases}$$

$$f_{ij}(t) = \begin{matrix} 0 & (i \leqslant j), \\ a_{ij}(t) & (i > j), \end{matrix} \qquad g_{ij}(t) = \begin{cases} a_{ij}(t) & (i < j), \\ 0 & (i \geqslant j). \end{cases} \tag{9}$$

Очевидно,

$$G(t) + F(t) = A(t). \tag{10}$$

Результат вычислений на нечетном шаге по схеме (8) можно представить в виде

$$X_{k+1} = [E + (E + C_{k+1} + C_{k+1}^2) B_{k+1}] X_k + 0(h^4). \tag{11}$$

На четном же шаге оказывается вычисленным вектор

$$X_{k+2} = [E + (E + D_{k+2} + D_{k+2}^2) B_{k+2}] X_{k+1} + 0(h^4). \tag{12}$$

Погрешность на шаге «реверсивной» схемы представим в виде вектора $\Delta X(h)$. На нечетном шаге эта погрешность оценивается выражением

$$\Delta X_{k+1}(h, X_k) = (C_{k+1} + C_{k+1}^2) B_{k+1} X_k + \delta X_{k+1}(h, X_k) + 0(h^4). \quad (13)$$

Погрешность на четном шаге удовлетворяет оценке

$$\Delta X_{k+2}(h, X_{k+1}) = (D_{k+2} + D_{k+2}^2) B_{k+2} X_{k+1} + \delta X_{k+2}(h, X_{k+1}) + 0(h^4). \quad (14)$$

Оценим суммарную погрешность, внесенную на нечетном и следующем за ним четном шагах «реверсивного» алгоритма (7), (8):

$$\Delta X_{k+2}(2h, X_k) = (E + B_{k+2}) \Delta X_{k+1}(h, X_k) + \\ + \Delta X_{k+2}[h, (E + B_{k+1}) X_k] + 0(h^4). \quad (15)$$

Используя представления

$$C_{k+1} = F_k h + \frac{1}{2} \dot{F}_k h^2 + 0(h^3), \quad D_{k+2} = G_k h + \frac{3}{2} \dot{G}_k h^2 + 0(h^3) \quad (16)$$

и учитывая равенство (10), преобразуем выражение (15) к виду

$$\Delta X_{k+2}(2h, X_k) = h^3 [(F_k^2 + G_k^2 + \dot{G}_k + A_k F_k) A_k + \\ + G_k(\dot{A}_k + A_k^2) - \frac{1}{3}(4A_k^3 + 2\dot{A}_k A_k + A_k \dot{A}_k)] X_k + 0(h^4). \quad (17)$$

Таким образом, погрешность в результате двух шагов «реверсивного» метода вычислений оказывается величиной третьего порядка малости относительно h, в то время как погрешности на каждом из шагов имеют второй порядок малости. Применение «реверсивной» схемы вычислений для интегрирования системы уравнений (1), удовлетворяющей условию (2), повышает точность вычислений на порядок по сравнению с обычным методом (5) при одинаковом объеме вычислений.

2. В некоторых приложениях возникает необходимость решения задачи Коши для системы неоднородных уравнений

$$\dot{Y} = A(t) Y + Z(t), \quad (18)$$

где Y — вектор искомых переменных $y_1, \ldots, y_n$; матрица A определена как в п. 1, а Z — n-мерный вектор, компоненты которого $z_1(t), \ldots, z_n(t)$ суть трижды непрерывно дифференцируемые функции аргумента t. Информацией для интегрирования системы (18) на $\kappa + 1$-м шаге служат элементы матрицы B_{k+1} и приращения $s_{1, k+1}, \ldots, s_{n, k+1}$ интегралов от компонент вектора Z на этом шаге, образующие вектор S_{k+1}:

$$S_{k+1} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} Z(t)\, dt. \quad (19)$$

Такого вида информацию приходится обрабатывать при вычислении проекций вектора скорости материальной точки на оси вращающегося координатного трехгранника по приращениям интегралов от проекций абсолютного ускорения точки на оси того же трехгранника.

Простейший и наименее точный метод интегрирования системы (18) состоит в том, что значения компонент вектора Y в конце шага вычисляются с использованием значений компонент этого вектора только в начале шага в соответствии с формулой

$$Y_{k+1} = (E + B_{k+1}) Y_k + S_{k+1}. \quad (20)$$

Погрешность этого метода на шаге имеет второй порядок малости относительно h:

$$\delta Y_{k+1}(h, Y_k, Z_k) = -\frac{1}{2} h^2 (A_k^2 Y_k + A_k Z_k) + 0(h^3). \quad (21)$$

Рассмотрим «реверсивную» модификацию метода (20), подобную рассмотренной в п. 1: на нечетных шагах последовательность вычислений определяется равенством

$$y_{m,k+1} = y_{mk} + s_{m,k+1} + \sum_{j=1}^{m-1} b_{mj,k+1} y_{j,k+1} + \sum_{j=m+1}^{n} b_{mj,k+1} y_{jk}$$
$$(m = 1, 2, \ldots, n; \qquad k = 0, 2, 4, \ldots). \tag{22}$$

На четных же шагах вычисления выполняются по схеме

$$y_{n-m,k+2} = y_{n-m,k+1} + s_{n-m,k+2} + \sum_{j=1}^{n-m-1} b_{n-m,j,k+2} y_{j,k+1} +$$
$$+ \sum_{j=n-m+1}^{n} b_{n-m,j,k+2} y_{j,k+2} \; (m = 0, 1, \ldots, n-1; \qquad k = 0, 2, 4, \ldots). \tag{23}$$

Вектор Y_{k+1}, вычисленный на нечетном шаге, можно представить в виде

$$Y_{k+1} = Y_k + (E + C_{k+1} + C_{k+1}^2)(B_{k+1} Y_k + S_{k+1}) + 0(h^4). \tag{24}$$

Результат же вычислений на четном шаге по схеме (23) удовлетворяет оценке

$$Y_{k+2} = Y_{k+1} + (E + D_{k+2} + D_{k+2}^2)(B_{k+2} Y_{k+1} + S_{k+2}) + 0(h^4). \tag{25}$$

Подставив выражение (24) в (25) и учитывая равенства (10) и (16), оценим результат вычислений на двух шагах «реверсивного» алгоритма:

$$Y_{k+2} = Y_k + 2(A_k Y_k + Z_k) h + 2[(\dot{A}_k + A_k^2) Y_k + \dot{Z}_k + A_k Z_k] h^2 + \left\{ \left[\frac{4}{3} \ddot{A}_k + \right.\right.$$
$$+ 2\dot{A}_k A_k + (A_k + G_k)\dot{A}_k + (F_k^2 + G_k^2 + A_k F_k + \dot{G}_k) A_k + G_k A_k^2 \Big] Y_k + \frac{4}{3} \ddot{Z}_k +$$
$$\left. + (A_k + G_k)\dot{Z}_k + (F_k^2 + G_k^2 + A_k F_k + G_k A_k + \dot{G}_k + 2\dot{A}_k) Z_k \right\} h^3 + 0(h^4). \tag{26}$$

Сопоставив формулу (26) с равенством

$$Y(t_{k+2}) = Y(t_k) + 2h\dot{Y}(t_k) + 2h^2 \ddot{Y}(t_k) + \frac{4}{3} h^3 \dddot{Y}(t_k) + 0(h^4), \tag{27}$$

получим оценку погрешности на двух шагах «реверсивного» алгоритма:

$$\Delta Y_{k+2}(2h, Y_k, Z_k, \dot{Z}_k) = h^3 \left\{ \left[(F_k^2 + G_k^2 + A_k F_k + \dot{G}_k) A_k + \right.\right.$$
$$\left. + G_k(\dot{A}_k + A_k^2) - \frac{1}{3}(4A_k^3 + 2\dot{A}_k A_k + A_k \dot{A}_k) \right] Y_k +$$
$$+ \left(G_k - \frac{1}{3} A_k \right) \dot{Z}_k + \left(F_k^2 + G_k^2 + A_k F_k + G_k A_k + \dot{G}_k - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{2}{3} \dot{A}_k - \frac{4}{3} A_k^2 \right) Z_k \right\} + 0(h^4). \tag{28}$$

Таким образом, и при интегрировании системы неоднородных уравнений (18), удовлетворяющей условию (2), «реверсивный» алгоритм (22), (23) позволяет повысить на порядок точность вычислений по сравнению с простым методом (20) без увеличения количества арифметических операций на шаге.

Поступила 12.X 1971 г.
Институт кибернетики АН УССР