УДК 519.41/47

О бипримарных минимальных несверхразрешимых группах

Е. И. Шатыло

В данной статье рассматриваются конечные несверхразрешимые группы, все истинные подгруппы которых сверхразрешимы — минимальные несверхразрешимые группы. Произвольная минимальная несверхразрешимая группа $\mathfrak{G}$ разложима в полупрямое произведение $\mathfrak{G} = \mathfrak{P} \leftthreetimes \mathfrak{H}$ инвариантной силовской подгруппы $\mathfrak{P}$ и холловской группы $\mathfrak{H}$ [1]. Группа $\mathfrak{H}$ здесь может быть примарной или бипримарной группой.

Если минимальная несверхразрешимая группа обладает таким свойством, что любой ее гомоморфный образ, отличный от самой группы (истинный гомоморфный образ), является сверхразрешимой группой, то такую группу назовем приведенной. В заметке [2] описано строение приведенных минимальных несверхразрешимых групп, порядки которых делятся на три различных простых числа. Соответствующую теорему из [2] можно сформулировать следующим образом.

Если $\mathfrak{G} = \mathfrak{P} \leftthreetimes \mathfrak{H}$ — приведенная минимальная несверхразрешимая группа порядка $p^a q^b r^c$, то для ее образующих элементов $P_0, P_1, \ldots, P_{r-1}, A, B$ выполняются следующие определяющие соотношения:

$$P_0^p = P_1^p = \ldots = P_{r-1}^p = A^q = B^{r^n} = 1, \quad B^{-1}AB = A^s, \quad A^{-1}P_iA = P_i^{h^{s^{r-i}}},$$

$$B^{-1}P_iB = P_{i+1} \qquad (i = 0, 1, \ldots, r-2), \quad B^{-1}P_{r-1}B = P_0^d,$$

где $s^r \equiv 1 (\mathrm{mod}\, q)$, d — первообразный корень степени r^{n-1}, а h — корень степени q из единицы в простом поле $K(p)$. При этом выполняются условия: $r \mid q-1$, $qr^n \mid p-1$.

Предложение 1. Пусть $\mathfrak{G} = \mathfrak{P} \leftthreetimes \mathfrak{H}$ — произвольная минимальная несверхразрешимая группа. Тогда фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ группы $\mathfrak{G}$ по инвариантной подгруппе $\mathfrak{N} = \{\Phi(\mathfrak{P}), C_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{P})\}$, порожденной $\Phi(\mathfrak{P})$, подгруппой Фраттини силовской подгруппы $\mathfrak{P}$, и группой $C_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{P})$ (централизатором $\mathfrak{P}$ в $\mathfrak{H}$) является приведенной минимальной несверхразрешимой группой.

Таким образом, если приведенной минимальной несверхразрешимой группой является сама группа $\mathfrak{G} = \mathfrak{P} \leftthreetimes \mathfrak{H}$, то группа $\mathfrak{P}$ — элементарная абелева, а $\mathfrak{H}$ (согласно [1]) либо является циклической, либо группой Миллера—Морено, минимальной неабелевой группой.

Группу Миллера—Морено назовем приведенной, если все ее истинные гомоморфные образы являются абелевыми группами. Из работы [3] вытекает, что существует три типа приведенных минимальных неабелевых групп, являющихся примарными группами:

1) $\mathfrak{H} = \{A, B \mid A^{q^m} = B^q = 1,\ B^{-1}AB = A^{q^{m-1}+1}\}$;

2) $\mathfrak{H} = \{A, B, C \mid A^q = B^q = C^q = 1,\ B^{-1}AB = AC,\ AC = CA,\ BC = CB\}$;

3) $\mathfrak{H} = \{A, B \mid A^4 = B^4 = 1,\ A^2 = B^2,\ B^{-1}AB = A^3\}$.

Предложение 2. Пусть $\mathfrak{G} = \mathfrak{P} \leftthreetimes \mathfrak{H}$ — бипримарная приведенная минимальная несверхразрешимая группа. Тогда группа $\mathfrak{H}$ является приведенной минимальной неабелевой группой.

Замечание. Для трипримарных минимальных несверхразрешимых групп предложение 2 не имеет места.

Теорема. *Пусть группа $\mathfrak{H}$ — примарная группа одного из трех отмеченных здесь типов приведенных групп Миллера—Морено и p — некоторое простое число. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1. *Если* $q^m \mid p-1$, *то существует приведенная минимальная несверхразрешимая группа* $\mathfrak{G} = \mathfrak{P} \leftthreetimes \mathfrak{H}$ *порядка* $p^q \cdot q^{m+1}$, *где* $\mathfrak{H}$ — *группа* $M - M$ *типа* 1). *Образующие элементы группы* $\mathfrak{H}$ — $P^0, P_1, \ldots, P_{q-1}$ A, B *связаны следующими определяющими соотношениями*:

$$P_0^p = P_1^p = \ldots = P_{q-1}^p = A^{q^m} = B^q = 1, \quad B^{-1}AB = A^{q^{m-1}+1},$$

$$A^{-1}P_iA = P_i^{h(q-i)q^{m-1}+1}, \quad B^{-1}P_iB = P_{i+1} \qquad (i = 0, 1, \ldots, q-2),$$

$$B^{-1}P_{q-1}B = P_0,$$

где h — *первообразный корень степени* q^m *из единицы в простом поле* $K(p)$;

2. *Если* $q \mid p-1$, *то существует приведенная минимальная несверхразрешимая группа* $\mathfrak{G} = \mathfrak{P} \leftthreetimes \mathfrak{H}$ *порядка* $p^q \cdot q^3$, *где* $\mathfrak{H}$ — *группа* $M - M$ *типа* 2):

$$\mathfrak{G} = \{P_0, P_1, \ldots, P_{q-1}, A, B, C\}, \quad P_0^p = P_1^p = \ldots = P_{q-1}^p = A^q = B^q = C^q = 1,$$

$$B^{-1}AB = AC, \; AC = CA, \; BC = CB, \; A^{-1}P_iA = P_i^{h^{q-i}},$$

$$B^{-1}P_iB = P_{i+1} \quad (i = 0, 1, \ldots, q-2), \; B^{-1}P_{q-1}B = P_0, \; C^{-1}P_iC = P_i^h,$$

где h — *корень степени* q *из единицы в простом поле* $K(p)$;

3. *Для произвольного* p *такого, что* $p-1$ *делится на* 4, *существует приведенная минимальная несверхразрешимая группа* $\mathfrak{H} = \mathfrak{P} \leftthreetimes \mathfrak{H}$ *порядка* $8 \cdot p^2$, *где* $\mathfrak{H}$ — *группа* $M - M$ *типа* 3) (*группа кватернионов*):

$$\mathfrak{G} = \{P_0, P_1, A, B\}, \quad P_0^p = P_1^p = A^4 = B^4 = 1, \quad A^2 = B^2, \; B^{-1}AB = A^3,$$

$$A^{-1}P_0A = P_0^h, \; A^{-1}P_1A = P_1^{h^3}, \quad B^{-1}P_0B = P_1, \; B^{-1}P_1B = P_0^{h^2},$$

где h — *корень четвертой степени из единицы в простом поле* $K(p)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Doerk, Minimal nichtuberauflösbare Gruppen, Math. Z., **91**, № 3, 1966, 198—205.
2. Е. И. Шатыло, Про мінімальні ненадрозв'язні групи максимального складенного порядку, V конференция молодых математиков Украины, Изд. Института математики АН УССР, 1970.
3. L. Redei, Das «schiefe» Product in der Gruppentheorie..., Comment. Math. Helv, **20**, 1947, 225—264.

Поступила 4.VII 1973 г.

Трест Укргеофизразведка