УДК 517.537

# Приближение аналитических функций многочленами Валле-Пуссена

*А. И. Швай*

Пусть $G$ — конечная область с односвязным дополнением, ограниченная гладкой кривой Г. Обозначим через $\Psi(w)$ функцию, которая осуществляет конформное отображение внешности единичного круга на внешность области $G$ и подчинена условиям $\psi(\infty) = \infty$, $\Psi'(\infty) > 0$. Функцию, обратную к $\Psi(w)$, обозначим через $w = \Phi(\zeta)$.

Класс областей, для каждой из которых функция $\Psi(w)$ на единичной окружности $|w| = 1$ имеет непрерывную и отличную от нуля производную $\Psi(w)$, будем обозначать через $(D)$.

Пусть в области $G$ из класса $(D)$ задана произвольная, аналитическая в $G$ и непрерывная на $\overline{G}$, функция $f(z)$. Отправляясь от разложения функции $f(z)$ в ряд Фабера $f(r) \sim \sum_{0}^{\infty} c_k \Phi_k(z)$, где $\Phi_k(z)$ — многочлены Фабера, а коэффициенты $c_k$ определяются формулами

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} f[\Psi(e^{it})] e^{-ikt} dt, \tag{1}$$

составим суммы Валле-Пуссена $V_n(f; z)$ по формулам

$$V_n(f; z) = \sum_{0}^{n} c_k \Phi_k(z) + \sum_{n+1}^{2n-1} \left(2 - \frac{k}{n}\right) c_k \Phi_k(z) = S_n(f; z) + \\ + \sum_{n+1}^{2n-1} \left(2 - \frac{k}{n}\right) c_k \Phi_k(z).$$

В работе [1] рассматривался вопрос о приближении функций, заданных на областях из класса $(D)$ частными суммами $S_n(f; z)$ ряда Фабера.

В предлагаемой статье доказывается, что многочлены Валле-Пуссена $V_n(f; z)$ являются лучшим аппаратом приближения по сравнению с частными суммами ряда Фабера *.

Теорема. *Если в области $G$ из класса $(D)$ задана аналитическая в $G$ и непрерывная на $\overline{G}$ функция $f(z)$, то для всех $z \in \overline{G}$ справедливо неравенство*

$$|f(z) - V_n(f; z)| \leqslant A\left(1 + \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\omega(\Psi', t)}{t} dt\right) E_n(f; \overline{G}), \tag{2}$$

*где $E_n(f; \overline{G})$ — наилучшее на области $\overline{G}$ приближение $n$-го порядка функции $f(z)$, $A$ — постоянная, не зависящая ни от $n$, ни от $z$.*

Доказательство. Учитывая интегральное представление многочленов Фабера (см., например, [2]) и коэффициентов $c_k$ по формуле (1), находим интегральное представление для сумм Валле-Пуссена

$$V_n(f; z) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} f[\Psi(e^{it})] \frac{dt}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\sum\limits_{-(2n-1)}^{2n-1} \lambda_{|k|} \Phi^k(\zeta) e^{-ikt}}{\zeta - z} d\zeta,$$

где $\lambda_k = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant k \leqslant n, \\ 2 - \dfrac{k}{n}, & \text{если } n+1 \leqslant k \leqslant 2n-1. \end{cases}$

Пусть $P_n(z)$ — полином $n$-го порядка наилучшего приближения функции $f(z)$ в замкнутой области $\overline{G}$. Тогда при всех $z \in \overline{G}$

$$|f(z) - V_n(f; z)| \leqslant |f(z) - P_n(z)| + |P_n(z) - V_n(f; z)| \leqslant \\ \leqslant E_n(f; \overline{G}) + |P_n(z) - V_n(f; z)|. \tag{3}$$

Для оценки разности $|P_n(z) - V_n(f; z)|$ заметим, что при $z \in G$ многочлен $P_n(z)$ можно представить в виде

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_n[\Psi(e^{it})] \frac{dt}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\sum\limits_{-(2n-1)}^{2n-1} \lambda_{|k|} \Phi^k(\zeta) e^{-ikt}}{\zeta - z} d\zeta.$$

Следовательно, разность $P_n(z) - V_n(f; z)$ при $z \in G$ можно представить в следующем интегральном виде:

$$P_n(z) - V_n(f; z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{P_n[\Psi(e^{it})] - f[\Psi(e^{it})]\} \frac{dt}{2\pi i} \times$$

$$\times \int_\Gamma \frac{\sum\limits_{-(2n-1)}^{2n-1} \lambda_{|k|} \Phi^k(\zeta) e^{-ikt}}{\zeta - z} d\zeta.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $z \to z_0 \in \Gamma$, по теореме Привалова о определенных значениях интеграла Коши (см., например, [3]) найдем

$$P_n(z_0) - V_n(f; z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{P_n[\Psi(e^{it})] - f[\Psi(e^{it})]\} dt \times$$

$$\times \left[\frac{1}{2} \sum_{-(2n-1)}^{2n-1} \lambda_{|k|} \Phi^k(z_0) e^{-ikt} + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\zeta - z_0)^{-1} \sum_{-(2n-1)}^{2n-1} \lambda_{|k|} \Phi^k(\zeta) e^{-ikt} d\zeta\right]. \quad (4)$$

Так как функция $\Phi^{-2n}(\zeta) \sum\limits_{-(2n-1)}^{2n-1} \lambda_{|k|} \Phi^k(\zeta) e^{-ikt}$ аналитическая в $C\overline{G}$, то при $z \in G$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\zeta - z)^{-1} \Phi^{-2n}(\zeta) \sum_{-(2n-1)}^{2n-1} \lambda_{|k|} \Phi^k(\zeta) e^{-ikt} d\zeta = 0.$$

Переходя к пределу при $z \to z_0 \in \Gamma$ в последнем равенстве, по той же теореме Привалова получаем

$$0 = \frac{1}{2} \frac{\sum\limits_{-(2n-1)}^{2n-1} \lambda_{|k|} \Phi^k(z_0) e^{-ikt}}{\Phi^{2n}(z_0)} + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\sum\limits_{-(2n-1)}^{2n-1} \lambda_{|k|} \Phi^k(\zeta) e^{-ikt}}{\Phi^{2n}(\zeta)(\zeta - z_0)} d\zeta.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2} \sum_{-(2n-1)}^{2n-1} \lambda_{|k|} \Phi^k(z_0) e^{-ikt} = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\Phi^{2n}(z_0)}{\Phi^{2n}(\zeta)} \frac{\sum\limits_{-(2n-1)}^{2n-1} \lambda_{|k|} \Phi^k(\zeta) e^{-ikt}}{\zeta - z_0} d\zeta. \quad (5)$$

Учитывая равенства (4), (5) и полагая $z_0 = \Psi(w_0)$, находим

$$P_n(z_0) - V_n(f; z_0) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\{P_n[\Psi(e^{it})]-f[\Psi(e^{it})]\}\frac{dt}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\left(1-\frac{w_0^{2n}}{w^{2n}}\right)\frac{\sum\limits_{-(2n-1)}^{2n-1}\lambda_{|k|}w^k e^{-ikt}}{\Psi(w)-\Psi(w_0)}\Psi'(w)\,dw. \tag{6}$$

Внутренний интеграл в равенстве (6) представим в виде суммы двух слагаемых

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\left(1-\frac{w_0^{2n}}{w^{2n}}\right)\frac{\sum\limits_{-(2n-1)}^{2n-1}\lambda_{|k|}w^k e^{-ikt}}{\Psi(w)-\Psi(w_0)}\Psi'(w)\,dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\left(1-\frac{w_0^{2n}}{w^{2n}}\right)\sum_{-(2n-1)}^{2n-1}\lambda_{|k|}w^k e^{-ikt}\left[\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w)-\Psi(w_0)}-\frac{1}{w-w_0}\right]dw +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\left(1-\frac{w_0^{2n}}{w^{2n}}\right)\frac{1}{w-w_0}\sum_{-(2n-1)}^{2n-1}\lambda_{|k|}w^k e^{-ikt}. \tag{7}$$

Учитывая теперь равенства (6) и (7), можем исследуемую разность $P_n(z_0)-$ $-V_n(f;\ z_0)$ представить в виде

$$P_n(z_0)-V_n(f;\ z_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\{P_n[\Psi(e^{it})]-f[\Psi(e^{it})]\}\frac{dt}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\left(1-\frac{w_0^{2n}}{w^{2n}}\right)\times$$

$$\times\sum_{-(2n-1)}^{2n-1}\lambda_{|k|}w^k e^{-ikt}\left[\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w)-\Psi(w_0)}-\frac{1}{w-w_0}\right]dw+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\{P_n[\Psi(e^{it})]-f[\Psi(e^{it})]\}\frac{dt}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\left(1-\frac{w_0^{2n}}{w^{2n}}\right)\times$$

$$\times\frac{\sum\limits_{-(2n-1)}^{2n-1}\lambda_{|k|}w^k e^{-ikt}}{w-w_0}\,dw = I_1+I_2. \tag{8}$$

Оценим каждый из интегралов в равенстве (8) в отдельности. Для оценки модуля интеграла $I_2$ заметим, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\left(1-\frac{w_0^{2n}}{w^{2n}}\right)\frac{\sum\limits_{-(2n-1)}^{2n-1}\lambda_{|k|}w^k e^{-ikt}}{w-w_0}\,dw=\sum_{-(2n-1)}^{2n-1}\lambda_{|k|}w_0^k e^{-ikt}.$$

Поэтому справедлива оценка

$$|I_2|\leqslant E_n(f;\ \overline{G})\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\sum_{-(2n-1)}^{2n-1}\lambda_{|k|}w_0^k e^{-ikt}\right|dt. \tag{9}$$

Меняя порядок интегрирования, модуль интеграла $I_1$ можно оценить следующим образом:

$$|I_1| \leqslant E_n(f; \overline{G}) \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{-(2n-1)}^{2n-1} \lambda_{|k|} w^k e^{-ikt} \right| dt \times$$

$$\times \int_{|w|=1} \left| 1 - \frac{w_0^{2n}}{w^{2n}} \right| \left| \frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - \Psi(w_0)} - \frac{1}{w - w_0} \right| |dw|. \qquad (10)$$

Для оценки внутреннего интеграла в правой части неравенства (10) разобьем окружность $\gamma = \{w : |w| = 1\}$ на две дуги: дугу $\gamma' \subset \gamma$ с центром в точке $w_0$ и длиной, равной $O\left(\frac{1}{n}\right)$, и дугу $\gamma \setminus \gamma'$. Учитывая свойства функции $\Psi(w)$, находим

$$\int_{\gamma'} \left| 1 - \frac{w_0^{2n}}{w^{2n}} \right| \left| \frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - \Psi(w_0)} - \frac{1}{w - w_0} \right| |dw| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\gamma'} |w^{2n} - w_0^{2n}| \left[ \frac{|\Psi'(w)|}{|\Psi(w) - \Psi(w_0)|} + \frac{1}{|w - w_0|} \right] |dw| = O(1), \qquad (11)$$

$$\int_{\gamma \setminus \gamma'} \left| 1 - \frac{w_0^{2n}}{w^{2n}} \right| \left| \frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - \Psi(w_0)} - \frac{1}{w - w_0} \right| |dw| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int_{\gamma \setminus \gamma'} \frac{|\Psi'(w)(w - w_0) - [\Psi(w) - \Psi(w_0)]|}{|\Psi(w) - \Psi(w_0)| |w - w_0|} |dw| \leqslant A \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\omega(\Psi', t)}{t} dt. \qquad (12)$$

Подставляя полученные оценки (11) и (12) в правую часть неравенства (10), получаем

$$|I_1| \leqslant A_1 E_n(f; \overline{G}) \left( 1 + \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\omega(\Psi', t)}{t} dt \right) \int_0^{2\pi} \left| \sum_{-(2n-1)}^{2n-1} \lambda_{|k|} w^k e^{-ikt} \right| dt. \qquad (13)$$

Учитывая теперь оценки (13), (9) и равенство (8), найдем

$$|P_n(z_0) - V_n(f; z_0)| \leqslant A_1 E_n(f; \overline{G}) \left( 1 + \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\omega(\Psi', t)}{t} dt \right) \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} \left\{ \left| \sum_{-(2n-1)}^{2n-1} \lambda_{|k|} w_0^k e^{-ikt} \right| + \left| \sum_{-(2n-1)}^{2n-1} \lambda_{|k|} w^k e^{-ikt} \right| \right\} dt.$$

Для получения оценки (2) следует поставить полученную оценку в правую часть неравенства (3) и заметить, что при любом $w \in \gamma$ имеет место неравенство

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{-(2n-1)}^{2n-1} \lambda_{|k|} w^k e^{-ikt} \right| dt \leqslant A_2$$

и что точка $z_0 \in \Gamma$ была выбрана произвольно.

## ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Воробйов, Про наближення аналітичних функцій частинними сумами ряду Фабера, ДАН УРСР, № 2, 1966.
2. В. К. Дзядык, О приближении аналитических функций в областях с гладкой и кусочно-гладкой границей, 3-я летняя математическая школа, «Наукова думка», К., 1966.
3. Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, «Наука», М., 1966.

Поступила 14.XI 1971 г.
Луцкий педагогический институт