УДК 519.45

О бесконечных M-группах

В. И. Юрченко

Группа G называется M-группой, если различные классы сопряженных элементов ее порождают различные нормальные делители.

В этой заметке рассматриваются бесконечные периодические M-группы с конечным числом классов сопряженных элементов, бесконечные M-группы с конечными классами сопряженных элементов, т. е. FC-группы [1], слойно-конечные M-группы, а также нильпотентные M-группы.

Приведем некоторые обозначения: $\langle a \rangle$ —нормальный делитель, порождаемый элементом a; $a \backsim b$ — элемент a сопряжен с элементом b; C_a — класс сопряженных с a элементов; $C(H)$ — централизатор множества H.

Теорема 1. *Бесконечных периодических M - групп с конечным числом классов сопряженных элементов не существует.*

Доказательство. В работе [2] доказано, что фактор-группа M-группы G по нормальному делителю N, являющемуся объединением возрастающего инвариантного ряда, не допускающего уплотнений нормальными делителями группы G, является M-группой. Поэтому очевидно, что произвольная фактор-группа M-группы с конечным числом классов сопряженных элементов является M-группой с конечным числом классов сопряженных элементов.

Пусть N—произвольный минимальный нормальный делитель группы G. Факторизуя группу G по максимальному нормальному делителю взаимно простому с N, получим M-группу $\overline{G}$ с единственным минимальным нормальным делителем $\overline{N}$, изоморфным N.

Для всех элементов $a \in \overline{G}$, $n \in \overline{N}$ имеем $an \backsim a$ (это следует из определения M-группы и единственности минимального нормального делителя). Поэтому для любой инволюции $s \in \overline{G}$ (существование инволюций в произвольной M-группе доказано в [2]) выполняется равенство $sns = n^{-1}$ для всех $n \in \overline{N}$. Если s_1, s_2 — произвольные инволюции, то, очевидно, $(s_1 s_2)^{-1} \times$ $\times\, n\,(s_1 s_2) = n$, $n \in \overline{N}$, т. е. $s_1 s_2 \in C(n)$ при любом $n \in \overline{N}$. Отсюда для произвольных элементов n_1, $n_2 \in \overline{N}$ и для любой инволюции $s \in \overline{G}$ получаем $(n_2 \cdot s \cdot s)^{-1}\, n_1\, (n_2 s s) = n_2^{-1} n_1 n_2 = n_1$, т. е. $\overline{N}$ — элементарный абелев нормальный делитель.

Тем самым доказано, что все минимальные нормальные делители M-группы с конечным числом классов сопряженных элементов абелевы, т. е. G — разрешимая группа. Но разрешимая группа с конечным числом классов сопряженных элементов, как известно, является конечной. Теорема 1 доказана.

M-группу, являющуюся FC-группой, будем называть MFC-группой. Из определения M-групп и строения FC-групп [1] непосредственно следует, что произвольная MFC-группа локально нормальна.

Теорема 2. *Для произвольной MFC-группы G* $\pi(G)=\{2, 3\}$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что произвольную FC-группу можно представить как объединение возрастающей последовательности своих нормальных делителей

$$\{1\}=N_0\subset N_1\subset\ldots\subset N_\omega\subset N_{\omega+1}\subset\ldots,$$

где для предельного α $N_a=\sum\limits_{\lambda<\alpha} N_\lambda$, если же $\alpha=\beta+1$, то $N_\alpha=N_\beta\cdot\langle a_\alpha\rangle$, $a_\alpha\notin N_\beta$. Отсюда следует, что каждый нормальный делитель FC-группы является объединением возрастающей последовательности нормальных делителей, не допускающей уплотнений нормальными делителями группы G. Но тогда, как показано в [2], произвольная фактор-группа MFC-группы является MFC-группой.

Это замечание дает возможность от произвольной MFC группы G перейти к MFC-группе $\overline{G}$ с единственным минимальным делителем $\overline{N}$ (точно так же, как при доказательстве теоремы 1).

Если $\overline{G}$ — бесконечная группа, то $\overline{N}$, очевидно, входит в централизатор любого класса сопряженных элементов, т. е. $\overline{N}$ входит в центр группы $\overline{G}$. Учитывая, что центр произвольной M-группы — элементарная абелева 2-группа, имеем в этом случае $|\overline{N}|=2^t$. Если же $\overline{G}$ — конечная группа, то $|\overline{N}|=2^\alpha$ или $|\overline{N}|=3^\beta$ [3].

Итак, каждый минимальный нормальный делитель MFC-группы является элементарной абелевой 2- или 3-группой. А это означает, что $\pi(G)=\{2, 3\}$. Теорема доказана.

Следствие. *Бесконечных слойно-конечных M-групп не существует.*

Доказательство. В силу доказанной теоремы 2 бесконечная слойно-конечная M-группа G имеет конечное множество простых делителей порядков элементов ($\pi(G)=\{2, 3\}$), но тогда [4] в ее центре содержится такая полная группа, по которой группа G дает конечную фактор-группу. Это противоречит теореме 2 из [2].

Заметим, что из определения M-группы непосредственно следует, что нильпотентная M-группа является 2-группой.

Примером бесконечной нильпотентной M-группы является следующая группа G, класс нильпотентности которой равен двум. Центр Z этой группы второго порядка $\{1, z\}$, для любого элемента $g\in G\setminus Z$ $g^2=z$. Очевидно, что G — M-группа.

В работе [5] построен пример группы без кручения с двумя классами сопряженных элементов. Это, очевидно, простая группа, являющаяся М-группой, так как не единичный класс сопряженных элементов порождает всю группу, а единичный — единичную подгруппу. Этот пример также показывает, что условие периодичности в теореме 2 [2] является существенным.

Приведем пример смешанной M-группы, представляющей интерес в связи с вопросом о наследуемости свойства M фактор-группами.

Группа G — свободное произведение двух циклических групп $G_1=\{a\}$, $G_2=\{b\}$ второго порядка. Класс C_a сопряженных с a элементов состоит, очевидно, из всех нечетных слов, для которых a — середина. Аналогично, класс C_b сопряженных с b элементов—все нечетные слова, для которых b — середина. Каждое нечетное слово принадлежит C_a или C_b.

Рассмотрим классы сопряженных элементов четных слов. Все четные слова и только они являются элементами циклической группы $\{ab\}$. Поэтому достаточно рассмотреть класс сопряженных с ab элементов $-C_{ab}$. Так как $a\cdot ab\cdot a=ba$, $b\cdot ab\cdot b=ba$, $a\cdot ba\cdot a=ab$, $b\cdot ba\cdot b=ab$, а трансформирование произвольным элементом $g\in G$ сводится к последовательному трансформированию элементами a и b, то $g^{-1}abg=ab$ или ba, т. е. $C_{ab}=$

$= (ab, ba)$. Учитывая, кроме того, что $g^{-1}(ab)^n g = (g^{-1}abg)^n$, имеем для любого n

$$C_{(ab)^n} = ((ab)^n, (ba)^n).$$

Итак, классы сопряженных элементов группы G: C_a, C_b, C_{ab}, $C_{(ab)^2},\ldots$ $\ldots, C_{(ab)^n}, \ldots$ Нормальные делители, порождаемые этими классами: $\langle a\rangle$, $\langle b\rangle$, $\langle ab\rangle = \{ab\}$, $\langle (ab)^2\rangle = \{(ab)^2\}, \ldots, \langle (ab)^n\rangle = \{(ab)^n\}, \ldots$ Причем, так как $G = G_1 \cdot G_2$, то, как известно, $G/\langle a\rangle \cong G_2$, $G/\langle b\rangle \cong G_1$, т. е. $\langle a\rangle \neq \langle b\rangle$. Очевидно также, что $\langle a\rangle \neq \langle (ab)^n\rangle$, $\langle b\rangle \neq \langle (ab)^n\rangle$ для всех n. Отсюда непосредственно следует, что G — M-группа.

Покажем, что в группе G существуют нормальные делители, фактор-группы по которым не являются M-группами. Для этого прежде всего заметим, что коммутантом группы G является циклическая группа $\{(ab)^2\}$. Из вышеизложенного следует, что любая подгруппа из G' — нормальный делитель группы G. Пусть, далее, p — любое простое число, не равное 3, N — подгруппа G', индекс которой в G' равен p. Так как $|G/G'| = 4$, то $|G/N| = 4p$, т. е. G/N не является M-группой.

Этот пример, кроме того, дает отрицательный ответ на вопрос, поставленный автору В. С. Чариным: не является ли всякая линейная M-группа периодической?

Действительно, группы G_1 и G_2 допускают, очевидно, представление матрицами, но тогда, как известно, их свободное произведение также представимо, т. е. группа G изоморфна линейной группе.

Аналогично изложенному примеру можно проверить, что свободное произведение любого множества элементарных абелевых 2-групп является M-группой.

С другой стороны, если порядок хотя бы одного из сомножителей произведения ab отличен от двух, то элемент ab не может быть сопряжен со своим обратным (проверяется непосредственно). Из этих замечаний следует справедливость следующего предложения: свободное произведение любого множества элементарных абелевых 2-групп и только оно является M-группой.

Автор выражает благодарность В. С. Чарину за внимание к работе и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Черников, О строении групп с конечными классами сопряженных элементов, ДАН СССР, т. 115, № 1, 1957.
2. В. И. Юрченко, О бесконечных периодических М-группах. УМЖ, т. 24, № 2, 1972.
3. В. І. Юрченко, Про один клас скінченних груп, ДАН УРСР, сер. А, № 9, 1972.
4. С. Н. Черников, Бесконечные слойно-конечные группы, Матем. сб., т. 22 (64), вып. 1, 1948.
5. G. Higman, B. H. Neuman and H. Neuman, Embedding therems for groups, J. London Math. Soc., 24, 1949, 247—254.

Поступила 27.III 1972 г.,
после переработки — 4.VI 1973 г.
Харьковский институт общественного питания