УДК 534.111

Колебания пластинки с сосредоточенными массами, лежащей на нелинейном упругом основании

П. А. Бондарев

При проектировании летательных аппаратов и других конструкций для космоса часто возникают задачи о колебаниях стержней, пластин, оболочек и других упругих систем, на которых укреплены объекты, представляемые в виде сосредоточенных масс.

В данной заметке дается приближенное решение задачи о вынужденных колебаниях прямоугольной пластинки с сосредоточенными массами M_i в точках $x = x_i$; $y = y_i$ ($i = 1, 2, \ldots, N$), лежащей на нелинейном упругом основании. К этим массам приложены малые возмущающие силы вида $\varepsilon \sum_{i=1}^{N} P_i \sin(\theta - \gamma_i)\, \delta(x - x_i)\, \delta(y - y_i)$. Влияние сосредоточенных масс на пластинку носит инерционный характер. Эффект их действия вводим в уравнение колебания пластинки с помощью дельта-функции [1].

Тогда дифференциальное уравнение вынужденных колебаний пластинки с сосредоточенными массами, лежащей на нелинейном упругом основании, запишется так:

$$D\nabla^4 w + \left[\mu + \sum_{i=1}^{N} M_i \delta(x - x_i)\, \delta(y - y_i)\right] \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + KW + \varepsilon K W^3 =$$

$$= \varepsilon \sum_{i=1}^{N} P_i \sin(\theta - \gamma_i)\, \delta(x - x_i)\, \delta(y - y_i), \tag{1}$$

где $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$; D — цилиндрическая жесткость пластинки; μ — масса, приходящаяся на единицу площади; $\delta(x, y)$ — дельта-функция $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$; $\tau = \varepsilon t$; ε — малый параметр; $\gamma_i = \frac{\pi l_i}{l}$, l_i — расстояние между силами P_i; K — коэффициент постели.

Пусть заданы начальные и граничные условия

$$W|_{t=0} = f_1(x, y), \quad \left.\frac{\partial W}{\partial t}\right|_{t=0} = f_2(x, y),$$

$$W|_{\substack{x=0\\x=a}} = 0, \quad W''_{xx}|_{\substack{x=0\\x=a}} = 0, \quad W|_{\substack{y=0\\y=b}} = 0, \quad W''_{yy}|_{\substack{y=0\\y=b}} = 0, \tag{2}$$

Аналогичная задача для балки решалась в работе [2].

Сначала рассмотрим свободные колебания пластинки с сосредоточенными массами при $\varepsilon = 0$

$$\nabla^4 W + \frac{1}{D}\left[\mu + \sum_{i=1}^{N} M_i \delta(x - x_i)\,\delta(y - y_i)\right]\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{K}{D} W = 0; \qquad (3)$$

решение (3), удовлетворяющее начальным и граничным условиям (2), будем искать в виде

$$W = \sum_{m,n=1}^{\infty} T_{mn}(t)\, X_{mn}(x, y). \qquad (4)$$

После подстановки (4) в (3) и разделения переменных получим два уравнения

$$\ddot{T}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2 T_{mn}(t) = 0, \qquad (5)$$

$$X^{\mathrm{IV}}_{(x)mn} + 2X^{\mathrm{IV}}_{(xy)mn} + X^{\mathrm{IV}}_{(y)mn} - \left\{\frac{\omega_{nn}^2}{D}\left[\mu + \sum_{i=1}^{N} M_i \delta(x - x_i)\,\delta(y - y_i)\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{K}{D}\right\} X_{m,n} = 0. \qquad (6)$$

Из уравнения (6) необходимо определить собственные функции $X_{mn}(x, y)$ и соответствующие им частоты ω_{mn}. Граничные условия для уравнения (6) будут следующими:

$$X(0, 0) = X(a, b) = X''(0, 0) = X''(a, b) = 0. \qquad (7)$$

Решение задачи (6), (7) выполняем с помощью конечного двойного интегрального синус-преобразования Фурье [3]. Положим

$$\overline{X}_{m,n}(s, p) = \int_0^a\int_0^b X_{mn}(x, y) \sin\frac{s\pi x}{a} \sin\frac{p\pi y}{b}. \qquad (8)$$

Умножим (6) на $\sin\frac{s\pi x}{a}\sin\frac{p\pi y}{b}dxdy$ и проинтегрируем. После вычисления интегралов с учетом (7) и (8) получим

$$\left[\left(\frac{\pi s}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi p}{b}\right)^2\right]^2 \overline{X}_{mn} - \frac{\omega_{mn}^2}{D}\overline{X}_{mn} + \frac{K}{D}\overline{X}_{mn} -$$

$$- \frac{\omega_{mn}^2}{D}\sum_{i=1}^{N} M_i X_{mn} \sin\frac{s\pi x}{a}\sin\frac{p\pi y}{b} = 0 \qquad (m, n = 1, 2, \ldots), \qquad (9)$$

откуда

$$\overline{X}_{mn}(s, p) = \frac{\dfrac{\omega_{mn}^2}{D}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} M_i X_{mn}(x, y) \sin\frac{s\pi x_i}{a}\sin\frac{p\pi y}{b}}{\left[\left(\dfrac{\pi s}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{\pi p}{b}\right)^2\right]^2 - \dfrac{\omega_{mn}^2\mu - K}{D}} \qquad (10)$$

с учетом

$$X_{mn} = \frac{4}{ab} \sum_{s,p=1}^{\infty} \bar{X}_{mn}(s, p) \sin\frac{s\pi x}{a} \sin\frac{p\pi y}{b}. \tag{11}$$

Находим

$$X_{m,n}(x, y) = \frac{4\omega_{mn}^2}{Dab} \sum_{i=1}^{N} M_i X_{mn}(x_i, y_i) \times$$

$$\times \sum_{s,p=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{s\pi x}{a} \sin\frac{p\pi y}{b} \sin\frac{s\pi x_i}{a} \sin\frac{p\pi y_i}{b}}{\left[\left(\frac{\pi s}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi p}{b}\right)^2\right]^2 - \frac{\omega_{mn}^2 \mu - K}{D}}. \tag{12}$$

Учитывая условия сопряжения в точках $x = x_i$, $y = y_i$, получим для определения $X(x_i y_i)$ и ω_{mn} систему

$$X_{mn}(x, y) = \frac{4\omega_{mn}^2}{Dab} \sum_{i=1}^{N} M_i X_{mn}(x_i, y_i) \Gamma_i(x, y), \tag{13}$$

где

$$\Gamma_i(x, y) = \sum_{s,p=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{s\pi x}{a} \sin\frac{p\pi y}{b} \sin\frac{s\pi x}{a} \sin\frac{p\pi y}{b}}{\left[\left(\frac{s\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{b}\right)^2\right]^2 - \frac{\omega_{mn}^2 \mu - K}{D}}. \tag{14}$$

Для того чтобы система (13) имела нетривиальное решение, необходимо, чтобы определитель этой системы равнялся нулю:

$$\det \| \beta M_i \Gamma_i(x_i, y_i) - \delta_{ij} \| = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, N), \tag{15}$$

где $\beta = \frac{4\omega_{mn}^2}{Dab}$; δ_{ij} — символ Кронекера.

Собственные значения будут корнями частичного уравнения (15). Определив ω_{mn} и $X(x_j y_j)$ из системы (13), находим затем по формуле (12) собственные функции данной задачи. Условие ортогональности собственных функций имеет вид

$$\int_0^a \int_0^b \rho(x, y) X_{mn}(x, y) X_{r,k}(x, y)\, dx dy = 0. \tag{16}$$

Равенство (16) доказывается известными методами, где $\rho(x, y) = \mu + \sum_{i=1}^{N} M_i \delta(x - x_i) \delta(y - y_i) \qquad (m, n, r, k = 1, 2, \ldots)$.

Решая уравнение (5), получим

$$T_{m,n}(t) = A_{mn} \sin\omega_{mn} t + B_{mn} \cos\omega_{mn} t. \tag{17}$$

Тогда решение задачи (3), (2) будет следующим:

$$W = \sum_{m,n=1}^{\infty} (A_{mn} \sin\omega_{mn} t + B_{m,n} \cos\omega_{mn} t) X_{mn}(x, y), \tag{18}$$

A_{mn} и B_{mn} находятся из начальных условий.

Теперь перейдем к изучению свободных колебаний пластинки, лежащей на нелинейном упругом основании.

$$D\nabla^4 W + \left[\mu + \sum_{i=1}^{N} M_i \delta(x - x_i)\,\delta(y - y_i)\right]\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + KW + \varepsilon K W^3 = 0. \quad (19)$$

При малом ε решение будет таким же, как и для (3):

$$W(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} T_{mn}(t)\, X_{mn}(x, y). \quad (20)$$

Подставляем (20) в (19) и умножим (19) на $X_{rk}(x, y)\,dxdy$, затем проинтегрируем в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$. Получим

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} T_{mn}(t)\left(\int_0^a\int_0^b X^{\mathrm{IV}}_{(x)} X_{rk}\,dxdy + 2\int_0^a\int_0^b X^{\mathrm{IV}}_{(xy)} X_{rk}\,dxdy + \int_0^a\int_0^b X^{\mathrm{IV}}_{(y)} X_{rk}\,dxdy\right) +$$

$$+ \frac{1}{D}\sum_{mn=1}^{\infty} \ddot{T}_{mn}(t)\int_0^a\int_0^b\left[\mu + \sum_{i=1}^{N} M_i\delta(x - x_i)\,\delta(y - y_i)\right] X_{mn}X_{rk}\,dxdy +$$

$$+ \frac{k}{D}\sum_{mn=1}^{\infty} T_{mn}(t)\int_0^a\int_0^b X_{mn}X_{rk}\,dxdy = -\varepsilon K\int_0^a\int_0^b\left[\sum_{mn=1}^{\infty} T_{mn}X_{mn}\right]^3 X_{rk}\,dxdy. \quad (21)$$

Учитывая (6), уравнение (21) запишем так:

$$\sum_{mn=1}^{\infty}[\ddot{T}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2 T_{mn}]\int_0^a\int_0^b\left[\mu + \sum_{i=1}^{N} M_i\delta(x - x_i)\,\delta(y - y_i)\right] X_{mn}X_{rk}\,dxdy =$$

$$= -\varepsilon K\int_0^a\int_0^b\left[\sum_{mn=1}^{\infty} T_{mn}X_{mn}\right]^3 X_{rk}\,dxdy. \quad (22)$$

Для определения влияния нелинейного члена $\varepsilon K W^3$ ограничимся первым приближением. Полагаем $m, n = 1$, и учитывая условие ортогональности, уравнение (22) сведем к виду:

$$\ddot{T}_{11} + \omega_{11}^2 T_{11} = -\varepsilon K\,\frac{\int_0^a\int_0^b X_{11}^4\,dxdy}{\int_0^a\int_0^b \mu X_{11}^2\,dxdy + \sum_{i=1}^{N} M_i X_{11}^2}\,T_{11}^3 \quad (23)$$

или, обозначая

$$\alpha_1 = \frac{\int_0^a\int_0^b X_{11}^4\,dxdy}{\int_0^a\int_0^b \mu X_{11}^2\,dxdy + \sum_{i=1}^{N} M_i X_{11}^2},$$

получим уравнение с кубической нелинейностью:

$$\ddot{T}_{11} + \omega_{11}^2 T_{11} = -\varepsilon K\alpha_1 T_{11}^3. \quad (24)$$

Уравнение (24) может быть решено с помощью асимптотического метода Крылова — Боголюбова — Митропольского [4]. Ищем решение (24) в первом приближении:

$$T_{11} = a_{11} \cos \psi, \quad \text{где} \quad \psi = \omega_{11} t + \theta; \tag{25}$$

$$\frac{da_{11}}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_{11} + \varepsilon K \alpha_1 \frac{3}{8\omega_{11}} a_{11}^2. \tag{26}$$

Из первого уравнения системы (26) заключаем, что пластинка колеблется с постоянной амплитудой. Решая второе уравнение, находим

$$\psi = \left(\omega_{11} + \frac{3\varepsilon K \alpha_1}{8\omega_{11}} a_{11}^2\right) t + \theta. \tag{27}$$

В первом приближении колебания пластинки будут гармоническими. Нелинейный член $\varepsilon K W^3$ вызывает зависимость частоты от амплитуды, иначе, система теряет свою изохронность. Подставляя найденные значения T_{11} и ψ в равенство (20), получим решение уравнения (19) в первом приближении

$$W(x, y, t) = a_{11} X_{11}(x, y) \cos \left[\left(\omega_{11} + \frac{3\varepsilon K \alpha_1}{8\omega_{11}} a^2\right) t + \theta\right]. \tag{28}$$

Уравнения первого приближения для вынужденных колебаний пластинки (1) получим, исходя из резонансного случая, когда частота возмущающей силы $\nu(\tau)$ равна собственной частоте колебаний пластинки.

Тогда, пользуясь асимптотическими методами нелинейной механики, приближенное решение возмущенного уравнения (1) для одночастотного колебательного режима, близкого к первому нормальному колебанию в случае главного резонанса, ищем в виде

$$W = a_{11} X_{11}(x, y) \cos(\psi + \theta), \tag{29}$$

a_{11} и ψ определяются из системы уравнений первого приближения

$$\frac{da_{11}}{dt} = -\frac{\varepsilon}{M_1 [\omega_{11} + \nu(\tau)]} \sum_{i=1}^{N} P_1 X_{11}(x_i, y_i) \cos(\psi + \gamma_i), \tag{30}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_{11} - \nu(\tau) + \frac{3}{8} \varepsilon K \alpha_1 a_{11}^2 +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{m_1 a_{11} [\omega_{11} + \nu(\tau)]} \sum_{i=1}^{N} P_i X_{11}(x, y) \sin(\psi + \gamma_i),$$

где $m_1 = \int\limits_0^a \int\limits_0^b \rho(x, y) X_{11}^2(x, y)\, dx dy$.

В качестве примера рассмотрим вынужденные колебания пластинки с сосредоточенной массой M в центре при $x_0 = \frac{a}{2}$; $y_0 = \frac{b}{2}$. Выражение (12) справедливо для всех значений x и y, включая и $x = x_0$, $y = y_0$. Тогда из (12) получим

$$1 = \frac{4\omega_{mn}^2 M}{Dab} \sum_{s,p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\pi s}{2} \sin^2 \frac{\pi p}{2}}{\left[\left(\frac{\pi s}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi p}{b}\right)^2\right]^2 - \frac{\omega_{mn}^2 \mu - K}{D}}. \tag{31}$$

Двойной ряд (31) очень быстро сходится, если его просуммировать, то получим значения для ω_{mn}. Если ограничиться значениями s, $p = 1$, то частота колебаний первого тока ω_{11} для прямоугольной пластинки находится по формуле

$$\omega_{11} = \sqrt{\frac{Dab\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)\right]^2 - abK}{4M + \mu ab}}; \tag{32}$$

в частности, если $K = 0$, то получим формулу

$$\omega_{11} = \pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\sqrt{\frac{Dab}{4M + \mu ab}}. \tag{33}$$

При $k = 0$ и $M = 0$ получим формулу, известную из классических работ

$$\omega_{11} = \pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\sqrt{\frac{D}{\mu}}. \tag{34}$$

Сравнивая (32) и (34), можно сделать вывод о том, что сосредоточенная масса M уменьшает частоту колебаний пластинки. Прогиб W пластинки увеличивается и достигает максимума в случае, когда масса M находится в центре пластинки.

Уравнения первого приближения в этом случае имеют вид

$$\frac{da_{11}}{dt} = -\frac{\varepsilon}{m_1\left[\omega_{11} + \nu(\tau)\right]} P_1 X_{11}\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)\cos\psi,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_{11} - \nu(\tau) + \frac{3}{8}\varepsilon K \alpha_1 a_{11}^2 +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{m_1 a_{11}\left[\omega_{11} + \nu(\tau)\right]} P_1 X_{11}\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)\sin\psi. \tag{35}$$

Полученные уравнения могут быть проинтегрированы на рассматриваемом интервале времени численными методами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амба-Рао, О колебаниях прямоугольной пластинки, несущей сосредоточенную массу, Прикладная механика, Труды американского о-ва инженеров-механиков, т. 31, № 3, 1964.
2. Б. И. Дзыра, О поперечных колебаниях балок с сосредоточенными массами, лежащих на упругом основании, сб. Краевые задачи математической физики, Изд. Ин-та математики АН УССР, К., 1973.
3. И. Снеддон, Преобразование Фурье, ИЛ, М., 1955.
4. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958.

Поступила 13.II 1973 г.
Институт математики АН УССР