УДК 517.433

К вопросу существования гейзенберговской динамики

И. М. Бурбан

Построение гейзенберговской динамики в гамильтоновском формализме квантовой теории поля наталкивается на трудности, связанные с объемными расходимостями. В работах [1, 2] показано, что в некоторых случаях этих трудностей можно избежать в алгебраическом подходе квантовой теории поля.

В данной заметке указаны достаточные условия существования гейзенберговской динамики, усиливающие результаты работы [1].

1. Пусть $\Phi_0(\underline{x})$ — свободное поле и $\Pi_0(\underline{x})$ — ему канонически сопряженное в фоковском пространстве F, так что

$$\Phi_0(f) = \int \Phi_0(\underline{x}) f(\underline{x})\, d\underline{x},$$
$$\Pi_0(g) = \int \Pi_0(\underline{x}) g(\underline{x})\, d\underline{x} \qquad (1)$$

— самосопряженные операторы на некоторой области D, плотной в F. Унитарные операторы $U(f) = \exp i\,\Phi_0(f)$ и $V(g) = \exp i\,\Pi_0(g)$ удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям (вейлевская форма)

$$U(f+f') = U(f)\,U(f'),\ V(g+g') = V(g)\,V(g'),$$
$$U(f)\,V(g) = \exp - i\,(f, g)\,V(g)\,U(f). \qquad (2)$$

Для каждой ограниченной открытой области $\underline{O} \subset R^3$ поставим в соответствие кольцо Дж. Неймана

$$\mathfrak{A}(\underline{O}) = \{U(f)\,V(g)\}'', \qquad (3)$$

где $\operatorname{supp} f \subset \underline{O}$ и $\operatorname{supp} g \subset \underline{O}$, двумя штрихами обозначим бикоммутант множества операторов.

Рассмотрим кольцо $\mathfrak{A}$, полученное объединением всех локальных колец $\mathfrak{A}(\underline{O})$, соответствующих ограниченным открытым областям $\underline{O} \subset R^3$, т. е.

$$\mathfrak{A} = \bigcup_{\underline{O}} \mathfrak{A}(\underline{O}). \qquad (4)$$

Пусть полный гамильтониан системы имеет вид

$$H_k = H_0 + V_k, \qquad (5)$$

где

$$V_k = \int V(\underline{x}, 0)\, h_k(\underline{x}),\, d\underline{x}, \qquad (6)$$

$$h_k(x) = \begin{cases} 1 \text{ для } |\underline{x}| \leqslant k, \\ 0 \text{ для } |\underline{x}| > k. \end{cases} \qquad (7)$$

Предположим, что плотность гамильтониана взаимодействия является квазилокальной плотностью [1], т. е.

$$[V(\underline{x}, 0),\ V(\underline{y}, 0)] = 0 \qquad (8)$$

для $|\underline{x} - \underline{y}| \geqslant b$ (b — неотрицательное) и

$$[V(\underline{x}, 0), A] = 0 \qquad (9)$$

для всех $A \in \mathfrak{A}(\underline{O})$, если расстояние $\underline{x}$ до $\underline{O}$ больше b. При помощи предельного перехода построим гейзенберговскую динамику [1] $\sigma(t)[A]$ как автоморфизм кольца $\mathfrak{A}$.

$$\sigma(t)[A] = \lim_k \sigma_k(t)[A], \tag{10}$$

$$\sigma_k(t)[A] = \exp itH_k A \exp - itH_k \tag{11}$$

$\forall A \in \mathfrak{A}$.

Теорема. *Пусть гамильтониан взаимодействия V_k с квазилокальной плотностью $V(x, 0)$ является самосопряженным оператором в фоковском пространстве F. Если полный гамильтониан системы $H_k = H_0 + V_k$ является самосопряженным оператором на области $D \subset F$ для всех конечных k и для каждой ограниченной открытой области $\underline{O} \subset R^3$*

$$\exp itV_k A \exp - itV_k \in \mathfrak{A}(\underline{O}) \tag{12}$$

$\forall A \in \mathfrak{A}(\underline{O})$, *тогда существует гейзенберговская динамика* $\sigma(t)[A]$.

Так как H_k и V_k — самосопряженные в F операторы, то мы находимся в условиях теоремы Троттера [3] для произведения полугрупп, т. е.

$$\exp itH_k\varphi = s - \lim_{n\to\infty}\left[\exp\frac{it}{n}H_0\exp\frac{it}{n}V_k\right]^n\varphi. \tag{13}$$

Пользуясь непрерывностью произведения операторов в сильной операторной топологии, получаем

$$\sigma_k(t)[A] = s - \lim_{n\to\infty}\left[\exp\frac{it}{n}H_0\exp\frac{it}{n}V_k\right]^n A\left[\exp-\frac{it}{n}V_k\exp-\frac{it}{n}H_0\right]^n. \tag{14}$$

Докажем существование предела

$$\sigma(t)[A] = \lim_{k\to\infty}\sigma_k(t)[A] \tag{15}$$

$\forall A \in \mathfrak{A}(\underline{O})$ в равномерной операторной топологии. Для этого достаточно доказать для каждой ограниченной открытой области $\underline{O} \subset R^3$ существование $k(\underline{O}, t)$ такого, что

$$\sigma_{k_1}(t)[A] = \sigma_{k_2}(t)[A] \tag{16}$$

$\forall A \in \mathfrak{A}(\underline{O})$ и $\forall k_1, k_2 > k(\underline{O}, t)$.

Так как $\sigma_k(t)[A]$ является пределом последовательности

$$\left\{\left[\exp\frac{it}{n}H_0\exp\frac{it}{n}V_k\right]^n A\left[\exp-\frac{it}{n}V_k\exp-\frac{it}{n}H_0\right]^n\right\}_{n=1}^{\infty}, \tag{17}$$

то достаточно доказать (16) для каждого члена последовательности (17).

С этой целью рассмотрим

$$\begin{aligned}
\sigma_k^{n(1)}(t)[A] &= \exp\frac{it}{n}H_0\exp\frac{it}{n}V_k\exp-\frac{it}{n}V_k\exp-\frac{it}{n}H_0,\\
\sigma_k^{n(2)}(t)[A] &= \left[\exp\frac{it}{n}H_0\exp\frac{it}{n}V_k\right]^2 A\left[\exp-\frac{it}{n}V_k\exp-\frac{it}{n}H_0\right]^2, \qquad (18)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\sigma_k^{n(n)}(t)[A] &= \left[\exp\frac{it}{n}H_0\exp\frac{it}{n}V_k\right]^n A\left[\exp-\frac{it}{n}V_k\exp-\frac{it}{n}H_0\right]^n.
\end{aligned}$$

Представим $\sigma_k^{n(1)}(t)[A]$ в таком виде:

$$\sigma_k^{n(1)}(t)[A] = \exp\frac{it}{n}H_0\pi_k(t)[A]\exp-\frac{it}{n}H_0, \tag{19}$$

где

$$\pi_k(t)[A] = \exp\frac{it}{n} V_k A \exp - \frac{it}{n} V_k. \tag{20}$$

Каждое локальное кольцо $\mathfrak{A}(\underline{O})$ является локально выпуклым пространством, в котором топология задается системой полунорм

$$p_n(A) = \sum_{i=1}^{n} |(f_i, Ag_i)|, \tag{21}$$

$f_i, g_i,\ i = 1, 2, \ldots, n,$ — некоторый набор векторов из F.

Так как

$$p_n(\pi_k(t)[A] - \pi_k(t')[A]) \to 0 \tag{22}$$

при t, стремящемся к t', то $\pi_k(t)\colon \mathfrak{A}(\underline{O}) \to \mathfrak{A}(\underline{O})$ является непрерывной однопараметрической группой.

Каждый из векторов $A \in \mathfrak{A}(\underline{O})$ является слабо экспоненциальным вектором [4] для $\pi_k(t)$, так как для любого непрерывного функционала Φ над $\mathfrak{A}(\underline{O})$ из

$$|\Phi(A)| \leqslant \beta p_n(A) \tag{23}$$

следует

$$|\Phi(\pi_k(t)[A])| \leqslant M_k \exp\omega_k |t|. \tag{24}$$

В силу теоремы 5 [4, раздел 6] существует плотное в $\mathfrak{A}(\underline{O})$ множество D_k^{ω} аналитических векторов для $\pi_k(t)$. Легко доказать, что n-я производная от $\pi_k(t)[A]$ имеет вид

$$\pi_k^{(n)}(0)[A] = i^n [V_k, [V_k, \ldots [V_k, A] \ldots] \tag{25}$$

$\forall A \in Д_k^{\omega}$. В силу квазилокальности $V(\underline{x}, 0)$ существует [1] $k(O)$ такое, что

$$[V_k, A] D = [V_{k'}, A] D \tag{26}$$

$\forall k, k > k(O)$, а в силу условия (12)

$$[V_k, [V_k, \ldots [V_k, A] \ldots] D = [V_{k'}, [V_{k'}, \ldots, [V_{k'}, A] \ldots] D \tag{27}$$

$$\forall k, k' > k(O)\ \ \forall A \in Д_k^{\omega}.$$

Поэтому

$$Д_k^{\omega} = Д_{k'}^{\omega}\ \ \forall k, k' > k(\underline{O}) \tag{28}$$

и

$$\pi_k(t)[A] = \pi_{k'}(t)[A]. \tag{29}$$

Пусть $\underline{O}$ будет областью $|\underline{x}| < M$, а $O_\varepsilon = \{\underline{x} : \underline{x} = \underline{y} + \underline{\delta},\ \underline{y} \in \underline{O},\ |\underline{\delta}| \leqslant \varepsilon\}$. Так как [5]

$$\exp itH_0 A \exp - itH_0 \in \mathfrak{A}(O_t) \tag{30}$$

$\forall A \in \mathfrak{A}(\underline{O})$ и, следовательно,

$$\sigma_k^{n(1)}(t)[A] \in \mathfrak{A}(\underline{O}_{\frac{t}{n}}) \tag{31}$$

$\forall A \in \mathfrak{A}(\underline{O})$, то из (29) заключаем

$$\sigma_k^{n(1)}(t)[A] = \sigma_{k'}^{n(1)}(t)[A]\ \ \forall A \in \mathfrak{A}(\underline{O})\ \ \forall k, k' > k(\underline{O}). \tag{32}$$

Аналогично,

$$\sigma_k^{n(2)}(t)[A] = \sigma_{k'}^{n(2)}(t)[A]\quad \forall A \in \mathfrak{A}(\underline{O}_{\frac{t}{n}})\ \ \forall k, k' \geqslant k\left(\underline{O}, \frac{t}{n}\right) \geqslant k_0(\underline{O}). \tag{33}$$

Продолжая процесс, последовательно находим

$$\sigma_k^{n(n)}(t)[A] = \sigma_{k'}^{n(n)}(t)[A] \ \forall A \in \mathfrak{A}(\underline{O}_{\frac{n-1}{n}t}) \ \forall k, k' > k\left(\underline{O}, \frac{n-1}{n}t\right). \quad (34)$$

Так как

$$\mathfrak{A}(\underline{O}) \subseteq \mathfrak{A}(\underline{O}_{\frac{t}{n}}) \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{A}(\underline{O}_{\frac{n-1}{n}t}) \subseteq \mathfrak{A}(\underline{O}_t) \quad (35)$$

и

$$k(\underline{O}) \leqslant \left(\underline{O}, \frac{t}{n}\right) \leqslant \ldots \leqslant k\left(\underline{O}, \frac{n-1}{n}t\right) \leqslant k(\underline{O}, t), \quad (36)$$

то для любого n существует $k(\underline{O}, t)$ такое, что

$$\sigma_k^n(t)[A] = \sigma_{k'}^n(t)[A] \ \forall A \in \mathfrak{A}(\underline{O}) \text{ и } \forall k, k' \geqslant k(\underline{O}, t), \quad (37)$$

что и требовалось доказать.

2. Рассмотрим систему, полный гамильтониан которой имеет вид

$$H_k = H_0 + V_k, \quad (38)$$

где

$$H_0 = \frac{1}{2}\int \{ :\Pi_0^2:(\underline{x}) + :(\nabla\Phi_0)^2:(\underline{x}) + m^2 :\Phi_0^2(\underline{x}): \} \, d\underline{x} \quad (39)$$

и

$$V_k = \int \Phi_0(\underline{x}) \, h_k(\underline{x}) \, dx. \quad (40)$$

Легко проверить, что для $\underline{x} \in R^s$, $s \geqslant 2$ и $h_k(\underline{x}) = 1$ (38) не будет оператором в фоковском пространстве F. Но так как

$$\exp itV_k U(f) \exp - itV_k = U(f) \quad (41)$$

и

$$\exp itV_k V(g) \exp - itV_k = \exp - it(h_k, g) V(g), \quad (42)$$

то выполняются услсвия указанной выше теоремы и, следовательно, существует гейзенберговская динамика $\sigma(t)[A]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Guenin, On the intevaction picture, Commun. Math. Phys., 3, 1, 1966.
2. I. E. Segal, Notes toward the construction of nonlinear relalivistic quantum fields, I. The hamiltonian in two space-time dimension as the generator of a C^*-antomorphism group, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 57, 5, 1967.
3. H. F. Trotter, On the product of semi-groups of operators, Proc. Amer. Math. Soc., 10, 2, 1959.
4. R. T. Moore, Measurable, continuons and smooth vectors for semigroups and group representations, Mem. Amer. Math. Soc., 78, 1968.
5. J. Glimm, A. Jaffe, A $\lambda\varphi^4$ quantum field theory withaut cutoffs. I, 176, 5, 1968.

Поступила 17.VII 1972 г.

Институт теоретической физики АН УССР