Об одном случае фильтрации под заглубленнь

Т. В. Д

Точное решение задачи фильтрации под гидротехни-
ниями на двухслойном основании вызывает значительны
тому представляет интерес исследование предельных
когда второй слой слабопроницаем и линия раздела мс

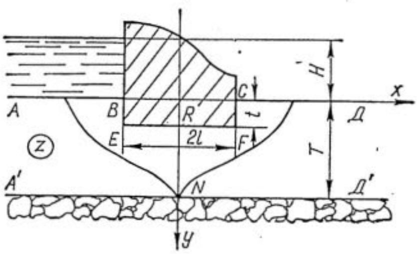

Рис. 1.

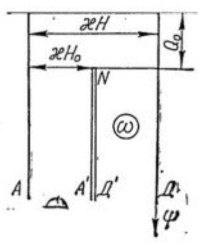

Рис. 2.

за водоупор, и случая, когда второй слой сильнопроницаем и линия разде. принимается за линию равного напора. В случае малой водопроницаемост нижнего слоя задачу рассматривали многие авторы, в частности П. Ф. Филь чаков [1, 2]. Случай, когда нижний слой обладает значительно больше водопроницаемостью, чем верхний, впервые рассмотрел Н. К. Гиринский [3]. Дальнейшее исследование задачи фильтраци и в таких грунтах по плоским флютбетом со шпунтом провел С. Н. Нумеров [1]. В данном случа линия раздела грунтов является линией с постоянным напором $h = H_0$ величине которого в указанных выше работах приписывалось напере заданное значение. В. И. Лаврик [4] рассмотрел случаи фильтрации по плоским флютбетом со шпунтом при неизвестном значении напора H_0.

В данной статье продолжены эти исследования для случая фильтраци под заглубленным флютбетом. Рассматриваемый случай гидротехническог сооружения изобржен на рис. 1 (на котором z — область фильтрации; H — действующий напор; T — глубина залегания сильпроницаемого слоя грун та; $2l$. — ширина флютбета; t — толщина флютбета). Согласно граничны условиям область комплексного потенциала ω представляет собой вертикальную полуполосу с разрезом, изображенную на рис. 2. Как показано в [4] в случае симметричного гидротехнического сооружения величина напор равна $H_0 = \frac{H}{2}$. Следуя [4], отобразим конформно вспомогательную полуплоскость ζ (рис. 3) на область комплексного потенциала ω с помощью функции

$$\omega = -\frac{\varkappa H}{\pi} i \operatorname{Arth} \frac{\zeta \sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{\zeta^2-\beta^2}} - \frac{\varkappa H}{2}. \tag{1}$$

Полученная функция является многозначной, поэтому для отображения полуплоскости на область ω следует выделять ее однозначные ветви.

Теперь для решения задачи достаточно отобразить вспомогательную полуплоскость ζ на область фильтрации z. Пользуясь интегралом Кристоффеля — Шварца, получаем

$$z = A_1 \int_0^{\zeta} \frac{\sqrt{\zeta^2-\alpha^2}}{(\zeta^2-1)\sqrt{\zeta^2-\beta^2}} d\zeta + A_2. \tag{2}$$

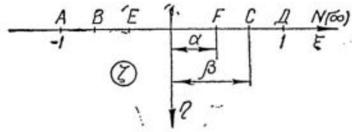

Рис. 3.

Преобразуем полученный интеграл

$$I = \int_0^{\zeta} \frac{\sqrt{\zeta^2-\alpha^2}\, d\zeta}{(\zeta^2-1)\sqrt{\zeta^2-\beta^2}} = \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2-\beta^2)(\zeta^2-\alpha^2)}} +$$

$$+ (1-\alpha^2) \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{(\zeta^2-1)\sqrt{(\zeta^2-\beta^2)(\zeta^2-\alpha^2)}} = I_1 + I_2.$$

Сделаем подстановку

$$\zeta = \alpha\tau, \tag{3}$$

тогда для I_1 получим

$$I_1 = \frac{1}{\beta} \int_0^{\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)\left(1-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\tau^2\right)}} = \frac{1}{\beta} F(\tau, m), \tag{4}$$

где модуль m эллиптического интеграла первого рода $F(\tau, m)$ равен

$$m = \frac{\alpha}{\beta}. \tag{5}$$

Второй интеграл также приводится к каноническому виду

$$I_2 = \frac{\alpha^2-1}{\beta} \int_0^{\tau} \frac{d\tau}{(1-\alpha^2\tau^2)\sqrt{(1-\tau^2)\left(1-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\tau^2\right)}} = \frac{\alpha^2-1}{\beta} \Pi(\tau, m, n), \tag{6}$$

где параметр n эллиптического интеграла третьего рода $\Pi(\tau, m, n)$ равен

$$n = -\alpha^2, \qquad (0 > n > -m^2). \tag{7}$$

Таким образом, отображающая функция (2) может быть представлена в виде

$$z = A_1 \left[\frac{1}{\beta} F(\tau, m) - \frac{1-\alpha^2}{\beta} \Pi(\tau, m, n) \right] + A_2. \tag{8}$$

Из соответствия точек $\zeta\,(0, 0)$ и $z\,(0, it)$ находим коэффициент A_2

$$A_2 = it. \tag{9}$$

Коэффициент A_1 найдем при помощи метода обхода особых точек. При обходе простого полюса $\zeta = 1$ по полуокружности s бесконечно малого радиуса ε функция z получает приращение, равное, согласно [5], следующей величине:

$$\Delta z = \lim_{\varepsilon \to 0} A_1 \int_s \frac{\sqrt{\zeta^2 - \alpha^2}}{(\zeta^2 - 1)\sqrt{\zeta^2 - \beta^2}}\, d\zeta =$$

$$= \pi i \operatorname{Res}\left[A_1 \frac{\sqrt{\zeta^2 - \alpha^2}}{(\zeta^2 - 1)\sqrt{\zeta^2 - \beta^2}}, 1\right] =$$

$$= \pi i \lim_{\zeta \to 1} \frac{A_1 (1 - \zeta)\sqrt{\zeta^2 - \alpha^2}}{(1 - \zeta^2)\sqrt{\zeta^2 - \beta^2}} = \frac{\pi i}{2} A_1 \sqrt{\frac{1 - \alpha^2}{1 - \beta^2}}. \tag{10}$$

С другой стороны, рассматривая область z, находим, что это приращение равно

$$\Delta z = iT. \tag{11}$$

Из (10), (11) получаем

$$A_1 = \frac{2T}{\pi} \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{1 - \alpha^2}}. \tag{12}$$

Найденный коэффициент A_1 преобразуем с учетом зависимостей (5), (7) и окончательно получаем отображающую функцию (8) в виде

$$z = \frac{2T}{\pi} \sqrt{\frac{m^2 + n}{-n(1 + n)}} \left[F(\tau, m) - (1 + n)\Pi(\tau, m, n)\right] + it, \tag{13}$$

где τ определяется из (3).

Для определения параметров m и n составим систему двух уравнений. Используя соответствие точек $\xi = \beta$ и $z = l$; $\xi = \alpha$ и $z = l + it$, из (13) имеем

$$l = \frac{2T}{\pi} \sqrt{\frac{m^2 + n}{-n(1 + n)}} \Big\{K(m) + iK'(m) -$$

$$- (1 + n)\left[\Pi(m, n) + i \frac{m^2}{n + m^2} \Pi(m', n')\right]\Big\} + it,$$

$$l + it = \frac{2T}{\pi} \sqrt{\frac{m^2 + n}{-n(1 + n)}} \left[K(m) - (1 + n)\Pi(m, n)\right] + it, \tag{14}$$

откуда получаем два уравнения для нахождения параметров m и n

$$\begin{aligned} l &= \frac{2T}{\pi} \sqrt{\frac{m^2 + n}{-n(1 + n)}} \left[K(m) - (1 + n)\Pi(m, n)\right], \\ t &= -\frac{2T}{\pi} \sqrt{\frac{m^2 + n}{-n(1 + n)}} \left[K'(m) - (1 + u)\frac{m^2}{n + m^2} \Pi(m', n')\right], \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$m' = \sqrt{1 - m^2}, \quad n' = -\frac{nm'^2}{n + m^2}. \tag{16}$$

При численном решении этой системы можно, задавая произвольные допустимые значения m и n, при помощи формул (15) находить соответствующие размеры l и t в долях T.

Пользуясь зависимостями (1) и (13), можно определить все необходимые фильтрационные характеристики. Остановимся, к примеру, на вопросе нахождения напора h на нижнем основании флютбета. Для этого возьмем ряд точек на полуплоскости ζ $(-\alpha \leqslant \zeta \leqslant \alpha)$ и из (1) вычислим соответствующие значения φ

$$\varphi = \frac{\varkappa H}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\zeta \sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{\beta^2 - \zeta^2}} - \frac{\varkappa H}{2}. \quad (17)$$

Соответствующую точку x, где действует приведенный напор $\bar{h} = -\frac{\varphi}{\varkappa H}$, можно найти из (13). Если $-\alpha \leqslant \zeta \leqslant \alpha$, то $-1 \leqslant \tau \leqslant 1$ и из (13) получаем

$$x = \frac{2T}{\pi} \sqrt{\frac{m^2 + n}{-n(1+n)}} \left[F(\tau, m) - (1+n)\,\Pi(\tau, m, n)\right]. \quad (18)$$

Пример. $n = -0{,}97$; $m^2 = 0{,}9846$; $\frac{l}{T} = 1$; $\frac{t}{T} = 0{,}3$.

Значения напора на нижнем основании флютбета приведены в таблице.

Таблица

$\frac{x}{T}$	-1	$-0{,}486$	$-0{,}307$	$-0{,}188$	$-0{,}090$	0	0,090	0,188	0,307	0,486	1
$\frac{h}{H}$	0,745	0,552	0,529	0,517	0,508	0,500	0,492	0,483	0,471	0,448	0,254

Укажем, что для нахождения значений эллиптических интегралов первого и третьего рода следует пользоваться таблицами [6].

В заключение выражаю благодарность В. И. Лаврику за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Аравин, С. Н. Нумеров, Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде, Гостехиздат, М., 1953.
2. П. Ф. Фильчаков, Теория фильтрации под гидротехническими сооружениями, т. 1, Изд-во АН УССР, К., 1959.
3. Н. К. Гиринский, Расчет фильтрации под гидротехническими сооружениями на неоднородных грунтах, Гостехиздат, М. — Л., 1941.
4. В. И. Лаврик, Решение одной краевой задачи теории фильтрации, УМЖ, т. 25, № 5, 1973.
5. Г. Корн, Т. Корн, Справочник, по математике, «Наука», М., 1968.
6. В. М. Беляков, Р. И. Кравцова, М. Г. Раппопорт, Таблицы эллиптических интегралов, т. 1, Изд-во АН СССР, М., 1962; т. 2, Изд-во АН СССР, М., 1963.

Поступила 18.VI 1973 г.
Институт математики АН УССР