УДК 517.942.4

О построении функционала Ляпунова для слабонеавтономного линейного уравнения в гильбертовом пространстве

О. Б. Лыкова

1. Пусть H — гильбертово пространство, R — кольцо ограниченных операторов, действующих в H.

Рассмотрим в H слабонеавтономное линейное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = Ax + P(\varphi)x, \tag{1.1}$$

где $A \in R$, $P(\varphi)$ — оператор-функция векторного аргумента $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ со значениями в R, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ — частотный базис $P(\varphi)$.

Вопросу построения функционала Ляпунова для уравнений типа (1.1) посвящена работа [1].

В данной работе предлагается метод построения функционала Ляпунова, основанный на приводимости исходного уравнения к уравнению с постоянным операторным коэффициентом

$$\frac{dy}{dt} = A^0 y \qquad \left(\frac{d\varphi}{dt} = \omega\right). \tag{1.2}$$

Предположим, что относительно уравнения (1.1) выполняются следующие условия.

1. Оператор-функция $P(\varphi)$ является 2π-периодической по $\varphi = (\varphi_1, \ldots \varphi)$, аналитической в области

$$|\operatorname{Im}\varphi| \leqslant \rho, \tag{1.3}$$

действительной при $\operatorname{Im}\varphi = 0$ и ограниченной константой M_0.

2. Для $\lambda, \mu \in \sigma(A)$, где $\sigma(A)$ — спектральное множество оператора A, и частот $\omega = \omega_1, \ldots, \omega_n$ оператор-функции $P(\varphi)$ выполняются соотношения

$$| i(k, \omega) + \lambda - \mu | \geqslant \varepsilon |k|^{-d} \tag{1.4}$$

для всех целочисленных векторов $k = (k_1, \ldots, k_n)$, где $(k, \omega) = (k_1\omega_1 + \ldots + k_n\omega_n)$ — некоторые положительные постоянные*.

При выполнении этих условий [2, 3] можно указать такую достаточно малую положительную постоянную $M_0 = M_0(\varepsilon, d)$, что при

$$\| P(\varphi) \| \leqslant M_0 \tag{1.5}$$

найдется преобразование

$$x = \Phi(\varphi) y, \tag{1.6}$$

2π-периодическое по φ и аналитическое по φ в области

$$|\operatorname{Im} \varphi| \leqslant \frac{\rho}{2}, \tag{1.7}$$

действительное при $\operatorname{Im} \varphi = 0$ и такое, что:

1) существует оператор $\Phi^{-1}(\varphi)$, обратный к $\Phi(\varphi)$;
2) уравнение (1.1) заменой (1.6) приводится к виду

$$\frac{dy}{dt} = A^0 y \quad \left(\frac{d\varphi}{dt} = \omega\right). \tag{1.8}$$

При этом преобразующая функция $\Phi(\varphi)$ представима в виде

$$\Phi(\varphi) = \prod_{j=1}^{\infty} (I + u^{(j)}(\varphi)), \tag{1.9}$$

где I — единичный оператор, $u^{(j)}(\varphi)$ — периодические решения операторно-дифференциальных уравнений

$$\left(\frac{\partial u^{(j)}(\varphi)}{\partial \varphi}, \ \omega\right) + u^{(j)}(\varphi) A_{j-1} - A_{j-1} u^{(j)}(\varphi) = P_{j-1}(\varphi) - \overline{P}_{j-1}, \tag{1.10}$$

причем

$$A^0 = A + \overline{P} + \sum_{j=1}^{\infty} \overline{P}_j, \tag{1.11}$$

$$P_j(\varphi) = (I + u^{(j)}(\varphi))^{-1} [P_{j-1}(\varphi) u^{(j)}(\varphi) - u^{(j)}(\varphi) \overline{P}_{j-1}], \tag{1.12}$$

$$P_1(\varphi) = (I + u^{(j)}(\varphi))^{-1} [P(\varphi) u^{(1)}(\varphi) - u^{(1)}(\varphi) \overline{P}], \tag{1.13}$$

$$\overline{P}_j = (2\pi)^{-n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} P_j(\varphi)\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_n, \tag{1.14}$$

$$\overline{P} = (2\pi)^{-n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} P(\varphi)\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_n. \tag{1.15}$$

---

* Заметим, что для самосопряженного оператора A условие (1.4) можно заменить условием

$$|(k, \omega)| \geqslant \varepsilon |k|^{-d}$$

для любых целочисленных векторов $k = (k_1, \ldots, k_n)$ и некоторых положительных постоянных ε, d, где $(k, \omega) = (k_1\omega_1 + \ldots + k_n\omega_n)$.

2. Представим функционал Ляпунова уравнения (1.8) в виде

$$V(y) = (V^0 y, y), \tag{2.1}$$

где $(V^0 y, y)$ означает скалярное произведение подлежащего определению оператора $V^0 \in H$ на элемент y из H.

Полная производная $\frac{dV(y)}{dt}$ в силу уравнения (1.8) имеет вид*

$$\frac{dV(y)}{dt} = \left(V^0 \frac{dy}{dt}, y\right) + \left(V^0 y, \frac{dy}{dt}\right) = ([V^0 A^0 + A^{0*} V^0] y, y) = (-W^0 y, y), \tag{2.2}$$

где W^0 — некоторый оператор со значениями в R.

Отсюда для определения V^0 получаем следующее операторное уравнение:

$$A^{0*} V^0 + V^0 A^0 = -W^0. \tag{2.3}$$

Принимая теперь во внимание, что согласно формуле замены переменных (1.6)

$$y = \Phi^{-1}(\varphi) x, \tag{2.4}$$

получаем следующее представление функционала Ляпунова для уравнения (1.1):

$$V(\varphi, x) = (V^0 [\Phi^{-1}(\varphi) x], \Phi^{-1}(\varphi) x). \tag{2.5}$$

Нетрудно показать, что полная производная от $V(\varphi, x)$ в силу уравнений (1.1) имеет вид

$$\frac{dV(\varphi, x)}{dt} = (-W^0 \Phi^{-1}(\varphi) x, \Phi^{-1}(\varphi) x). \tag{2.6}$$

Действительно, дифференцируя (2.5) по t, имеем

$$\frac{dV(\varphi, x)}{dt} = \left(V^0 \frac{d}{dt}[\Phi^{-1}(\varphi) x], \Phi^{-1}(\varphi) x\right) + \left(V^0 \Phi^{-1}(\varphi) x, \frac{d}{dt}[\Phi^{-1}(\varphi) x]\right) =$$

$$= \left(V^0 \frac{dy}{dt}, y\right) + \left(V^0 y, \frac{dy}{dt}\right) = (V^0 A^0 y, y) + (V^0 y, A^0 y) =$$

$$= (V^0 A^0 y, y) + (A^{0*} V^0 y, y) = ([V^0 A^0 + A^{0*} V^0] y, y) =$$

$$= (-W^0 y, y) = (-W^0 \Phi^{-1}(\varphi) x, \Phi^{-1}(\varphi) x).$$

3. Опишем алгоритм построения функционала Ляпунова для уравнения (1.1) с наперед заданной степенью точности.

Следуя используемому методу, совершим в исходном уравнении замену

$$x = [I + u^{(1)}(\varphi)] x_1, \tag{3.1}$$

где $u^{(1)}(\varphi)$ — периодическое решение уравнения типа (1.10):

$$\left(\frac{\partial u^{(1)}(\varphi)}{\partial \varphi}, \omega\right) + u^{(1)}(\varphi) A - A u^{(1)}(\varphi) = P(\varphi) - \overline{P}(\varphi). \tag{3.2}$$

---

* $\left(V^0 y, \frac{dy}{dt}\right) = (V^0 y, A^0 y) = (A^0\ V^0 y, g)$, где знак* означает сопряжение.

В результате относительно x_1 получим уравнение

$$\frac{dx_1}{dt} = A_1 x_1 + P^{(1)}(\varphi)\, x_1 \quad \left(\frac{d\varphi}{dt} = \omega\right), \tag{3.3}$$

где

$$A_1 = A + \overline{P}, \quad \overline{P} = (2\pi)^{-n} \int\limits_0^{2\pi} \ldots \int\limits_0^{2\pi} P(\varphi)\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_n, \tag{3.4}$$

$$P_1(\varphi) = [I + u^{(1)}(\varphi)]^{-1} [P(\varphi)\, u^{(1)}(\varphi) - u^{(1)}(\varphi) \overline{P}(\varphi)], \tag{3.5}$$

при этом [2, 3] из оценок для $u^{(1)}(\varphi), P(\varphi), \overline{P}(\varphi)$ вытекает, что если $P(\varphi)$ имеет порядок малости M_0, то $P_1(\varphi)$ имеет порядок малости M_0^2.

Таким образом, с точностью до M_0^2 вместо исходного уравнения (1.1) имеем уравнение

$$\frac{dx_1}{dt} = A_1 x_1 \quad \left(\frac{d\varphi}{dt} = \omega\right). \tag{3.6}$$

Предположим, что нам известен функционал Ляпунова для уравнения (3.6)

$$V(x_1) = (V_1^0 x_1, x_1) \tag{3.7}$$

и соответственно выражение

$$\frac{dV(x_1)}{dt} = (-W_1^0 x_1, x_1), \tag{3.8}$$

при этом, следуя (2.2), имеем соотношение

$$A_1^* V_1^0 + V_1^0 A_1 = -W_1^0. \tag{3.9}$$

Тогда функционал Ляпунова для исходного уравнения (1.1) с точностью до M_0^2 согласно (2.5), (3,1) будет иметь вид

$$V_1(\varphi, x) = (V_1^0 [I + u^{(1)}(\varphi)]^{-1} x, [I + u^{(1)}(\varphi)]^{-1} x) \tag{3.10}$$

и соответственно

$$\frac{dV_1(\varphi, x)}{dt} = (-W_1^0 (I + u^{(1)}(\varphi)]^{-1} x, [I + u^{(1)}(\varphi)]^{-1} x). \tag{3.11}$$

Таким образом, задача свелась к определению оператора V_1^0 и оператор-функции $u^{(1)}(\varphi)$.

Предположив, что известен функционал Ляпунова $V_0(x)$ для соответствующего (1.1) невозмущенного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \tag{3.12}$$

положим

$$W_1^0 = \overline{P}_1^* V_0(x) + V_0(x)\, \overline{P}_1, \tag{3.13}$$

где

$$\begin{gathered} \overline{P}_1^* = (2\pi)^{-n} \int\limits_0^{2\pi} \ldots \int\limits_0^{2\pi} P_1^*(\varphi)\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_n, \\ \overline{P}_1 = (2\pi)^{-n} \int\limits_0^{2\pi} \ldots \int\limits_0^{2\pi} P_1(\varphi)\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_n. \end{gathered} \tag{3.14}$$

Тогда для определения оператора V_1^0 получим уравнение

$$A_1^* V_1^0 + V_1^0 A_1 = -(\overline{P}_1^* V_0(x) + V_0(x)\overline{P}_1). \tag{3.15}$$

Рассмотрим уравнение (3.2). Принимая во внимание периодичность оператор-функции $P(\varphi)$, представим ее в виде m-кратного ряда Фурье

$$P(\varphi) = \sum_m P_m e^{i(m,\varphi)}, \tag{3.16}$$

где

$$P_m = (2\pi)^{-m} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} P(\varphi)\, e^{-i(m,\varphi)} d\varphi_1 \ldots d\varphi_m. \tag{3.17}$$

Соответствующим образом представим решение уравнения (3.2) в виде разложения

$$u^{(1)}(\varphi) = \sum_{(m)} u_m^{(1)} e^{i(m,\varphi)}. \tag{3.18}$$

Подставив (3.16) и (3.18) в уравнение (3.2), для определения коэффициентов $u_m^{(1)}$ получим следующее операторное уравнение:

$$i(m,\omega) I u_m^{(1)} + u_m^{(1)} A - A u_m^{(1)} = P_m \quad (m = 1, 2, \ldots). \tag{3.19}$$

В предположении, что для любых точек $\lambda, \mu \in \sigma(A)$ и частот $\omega_1, \ldots, \omega_n$ выполняется неравенство типа (1.4), на основании теоремы 1.1 из [4] следует, что уравнение (3.19) имеет единственное решение, представимое в виде

$$u_m^{(1)} = (-4\pi^2)^{-1} \oint_{\Gamma_1}\oint_{\Gamma_2} \frac{(A-\lambda I)^{-1} P_m (A-\mu I)^{-1}}{\lambda - \mu + i(m,\omega)}\, d\lambda d\mu. \tag{3.20}$$

Уравнение (3.15) является уравнением типа (3.19) и его решение также дается формулой типа (3.20).

Таким образом, функционал Ляпунова для уравнения (1.1) с точностью до M_0^2 имеет вид (3.10), где $u^{(1)}(\varphi)$ определяется посредством выражений (3.18), (3.20) и V_1^0 — как решение уравнения (3.15).

При s-й итерации функционал Ляпунова для уравнения (1.1) и его полная производная в силу уравнения (1.1) с точностью до величин порядка малости M_0^{2s} находятся из следующих выражений:

$$V_s(\varphi, x) = \left(V_s^0 \left[\prod_{i=1}^{s} (I + u^{(i)}(\varphi)) \right]^{-1} x, \left[\prod_{i=1}^{s} (I + u^{(i)}(\varphi)) \right]^{-1} x \right), \tag{3.21}$$

$$\frac{dV_s(\varphi, x)}{dt} = W_s(\varphi, x) = \left(-W_s^0 \left[\prod_{i=1}^{s} (I + u^{(i)}(\varphi)) \right]^{-1} x, \right.$$

$$\left. \left[\prod_{i=1}^{s} (I + u^{(i)}(\varphi)) \right]^{-1} x \right), \tag{3.22}$$

где оператор-функции $u^{(i)}(\varphi)$ — периодические решения дифференциально-операторных уравнений типа (1.10), а операторы V_s^0, W_s^0 удовлетворяют соотношению типа

$$A_s^* V_s^0 + V_s^0 A_s = -W_s^0,$$

где

$$A_s = A + \overline{P} + \sum_{j=1}^{s} \overline{P}_j. \tag{3.23}$$

Определив из уравнения (3.15) V_1^0 на второй итерации полагаем

$$W_2^0 = \overline{P}_2^* V_1^0 + V_1^0 \overline{P}_2, \tag{3.24}$$

где $\overline{P}_2$ определяется согласно (1.14).

Продолжая указанный процесс, на s-м шаге положим

$$W_s^0 = \overline{P}_s^* V_{s-1}^0 + V_{s-1}^0 \overline{P}_s. \tag{3.25}$$

Тогда получим

$$A_s^* V_s^0 + V_s^0 A_s = -(\overline{P}_s^* V_{s-1}^0 + V_{s-1}^0 \overline{P}_s). \tag{3.26}$$

Таким образом, задача нахождения функционала Ляпунова для исходного слабонеавтономного уравнения (1.1) с наперед заданной степенью точности в предположении, что известен функционал Ляпунова для соответствующего (1.1) «невозмущенного уравнения» (3.12), сводится к решению уравнений типа (1.10), (3.26).

ЛИТЕРАТУРА

1. О. Б. Лыкова, Б. М. Богатырев, Метод ускоренной сходимости в задаче построения функционала Ляпунова, сб. Метод интегральных многообразий в нелинейных дифференциальных уравнениях, Изд. Ин-та математики АН УССР, 1973.
2. О. Б. Лыкова, Б. М. Богатырев, О приводимости некоторых дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, УМЖ, т. 20, № 5, 1968.
3. Б. М. Богатырев, К вопросу построения решений линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами в банаховом пространстве, Труды семинара по математической физике, Изд. Ин-та математики АН УССР, 1968.
4. М. Г. Крейн, Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, Изд. Ин-та математики АН УССР, 1964.
5. Ю. О. Митропольський, О. Б. Ликова, Б. М. Богатирьов, Метод прискореної збіжності в задачі побудови функцій Ляпунова, ДАН УРСР, сер. А, № 8, 1972.
6. О. Б. Лыкова, Б. М. Богатырев, Об одном методе построения функции Ляпунова для слабо неавтономных линейных систем дифференциальных уравнений, УМЖ, т. 24, № 5, 1972.
7. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко, Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике, «Наукова думка», К., 1969.

Поступила 13.VII 1973 г.

Институт математики АН УССР,