УДК 518:512.25

# Обобщенно положительно определенные матрицы и их приложения

*В. Г. Мишутин*

Рассматриваются положительно определенные матрицы в том смысле, что собственные значения матричного пучка $L(\lambda) = A - \lambda W$, где $W$ — положительно определенная, а $A$ — произвольная матрицы, содержатся внутри правой полуплоскости.

На этой основе построен итерационный метод решения линейных алгебраических уравнений, сходящийся со скоростью геометрической прогрессии.

1. Определение. Матрица $A$ с комплексными элементами называется квазиположительно определенной (к. п. о.), если для нее существует такая положительно определенная матрица $W$, что собственные числа матричного пучка

$$L(\lambda) = A - \lambda W \tag{1}$$

содержатся внутри правой полуплоскости:

$$\operatorname{Re} \lambda_L \geqslant \varepsilon > 0. \tag{2}$$

Лемма 1. *Если $A$ — (к. п. о.) матрица, то*

a) $A = WW_0S$, *где* $W$, $W_0$ *и* $\operatorname{Re} S$ — *положительно определенные матрицы*;

b) $A^{-1}$ *есть (к. п. о.) матрица*;

c) $C = B^*AB$ — *(к. п. о.) матрица, если $B$ — обратимая матрица*;

d) $\operatorname{Re}(W^{-1}Ax, x)_{W_0^{-1}} = \operatorname{Re}(W_0^{-1}W^{-1}Ax, x) \geqslant m\,(W_0^{-1}x, x) = m\|x\|^2_{W_0^{-1}}$, $m > 0$, $x \in H_{W_0^{-1}} = H$, *где $H$ — евклидово комплексное пространство.*

Доказательство утверждений носит тривиальный характер, так как все они являются следствиями теоремы Ляпунова [1] о принадлежности собственных чисел матрицы $W^{-1}A$ правой полуплоскости.

Теорема 1 (обобщенный критерий Сильвестра). *Если*

$$\operatorname{Re}\frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_i} \geqslant \varepsilon > 0 \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1), \tag{3}$$

*где*

$$\Delta_0 = 1,\ \Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{bmatrix}, \ldots, \Delta_n = |A|, \tag{4}$$

*то $A$ — (к. п. о.) матрица.*

Доказательство. На основании (3) матрица $A$ допускает факторизацию

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ t_{21} & 1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 & & & 0 \\ & \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ & 1 & \cdots & t_{2n} \\ & & & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} = T_L D T_R. \tag{5}$$

Отсюда выводим

$$A = T_L T_L^* (T_L^*)^{-1} D T_R = W_0 (T_L^*)^{-1} D T_R = W_0 T_0. \tag{6}$$

Так как диагональные элементы матрицы $T_0$ подчинены неравенству (3) то всегда можно выбрать такую диагональную матрицу $D_0$ с положительными элементами, что для матрицы $T = D_0 T_0 D_0^{-1}$ будут справедливы неравенства

$$\operatorname{Re} t_{ii} > \sum_{j=1}^{n} |t_{ij}| \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$\operatorname{Re} t_{jj} > \sum_{i=1}^{j-1} |t_{ij}| \quad (j = 2, 3, \ldots, n).$$

Но тогда к матрице $\operatorname{Re} T$ применим критерий обратимости Адамара. Отсюда по теореме Гершгорина [1] заключаем, что

$$|\lambda_i - \operatorname{Re} t_{ii}| \leqslant \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |t_{ij}| < \operatorname{Re} t_{ii} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

что возможно, если $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Так как $\operatorname{Re} T$ — самосопряженная матрица, то, следовательно, она положительно определенная [1]:

$$M \| x \|^2 \geqslant \operatorname{Re}(Tx, x) \geqslant m \| x \|^2, \ m > 0, \ x \in H. \tag{7}$$

Учитывая (6), находим

$$A = W_0 T_0 = D_0^2 D_0^{-2} W_0 D_0^{-2} D_0 D_0 T_0 D_0^{-1} D_0 = D_0^2 W_1 D_0 T D_0 = D_0^2 W_1 S = W W_1 S. \tag{8}$$

По построению $W$, $W_1$ и $\operatorname{Re} S$ — положительно определенные матрицы. Из а) леммы 1 следует, что матрица $A$ есть (к. п. о.), что и требовалось доказать.

Будем обозначать далее через $V$ наипростейшую унитарную перестановочную матрицу, в каждой строке и каждом столбце которой содержится $\pm 1$ или $\pm i$, а все остальные элементы равны нулю.

Теорема 2. *Пусть $B$ — обратимая матрица. Тогда всегда можно найти такую перестановочную матрицу $V$ (или $V_1$ и $V_2$), что $A = VB$ (или $A = BV$, или $A = V_1 B V_2$) будет (к. п. о.) матрицей.*

Доказательство. Это утверждение представляет собой следствие метода Гаусса разложения матрицы на треугольные составляющие, который приводит матрицу к виду (5), где, как известно,

$$\frac{\Delta_{j+1}}{\Delta_j} = \alpha_{j+1} + i\beta_{j+1} \neq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{9}$$

Отсюда легко можно получить условие (3) путем умножения чисел (9) на $\pm 1$, $\pm i$, что совпадает по сути дела с преобразованием матрицы $B$ операцией $VB$ ($BV$), что и требовалось доказать.

Замечание. Из d) леммы 1 следует, что класс (к. п. о.) матриц включает в себя положительно определенные матрицы по Ляпунову ($W_0 = 1$), $K$ — положительно определенные матрицы [2] и также $T(D)$ — положительно определенные матрицы [3].

Как видим, все обратимые матрицы в унитарном пространстве принадлежат с точностью до простейшей матрицы $V$ классу обобщенно положительно определенных матриц. Причем методу Гаусса отводится здесь особая роль, так как его использование позволяет найти из произвольной матрицы $B$ (к. п. о.) матрицу $A = VB$. Другими словами, все матрицы есть обобщенно положительно определенные, если они только правильно, рационально записаны.

**2.** В этой своей новой роли гауссовский метод исключения совместно с полученными выше результатами находит различные приложения. Укажем на одно из них. Пусть нам необходимо найти решения уравнения на ЦВМ

$$Bx = f \tag{10}$$

с высокой степенью точности, где $B$ — произвольная обратимая матрица. Решая систему (10) гауссовским методом исключения, зачастую приходим к необходимости уточнить это решение каким-либо итерационным методом. Как видно из теоремы (22.7) [4], способ итерационного уточнения, построенный на использовании разложения матрицы на треугольные составляющие, пригоден для небольших систем уравнений. Поэтому будет, по-видимому, полезен следующий результат.

Теорема 3. *Если $A$ — (к. п. о.) матрица, допускающая разложение* (8), *то итерационный процесс*

$$D_0^2(x_{k+1} - x_k) = -q(Ax_k - f) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{11}$$

*при достаточно малом числе $q > 0$ сходится со скоростью геометрической прогрессии в унитарном пространстве $H_{W_1^{-1}}$ (и в $H$) к решению уравнения*

$$VBx = Ax = Vf = F. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $x^*$ — точное решение уравнения (10). Положив $\omega_k = x_k - x^*$ и учитывая (8), из (11) находим

$$\omega_{k+1} = [I - qD_0^{-2}A]\,\omega_k = [I - qW_1S]\,\omega_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{13}$$

Отсюда получаем

$$(W_1^{-1}\omega_{k+1}, \omega_{k+1}) = \|\omega_{k+1}\|^2_{W_1^{-1}} = \|\omega_k\|^2_{W_1^{-1}} - 2q\,\mathrm{Re}\,(S\omega_k, \omega_k) + $$

$$+ q^2(W_1S\omega_k, S\omega_k),$$

где

$$M_1\|x\|^2 \geqslant (W_1x, x) \geqslant m_1\|x\|^2, \quad m_1 > 0, \quad x \in H, \tag{14}$$

$$\mathrm{Re}\,(S\omega_k, \omega_k) \geqslant m_2\|\omega_k\|^2 \geqslant m_1m_2\|\omega_k\|^2_{W_1^{-1}}, \ \|S\omega_k\|^2 \leqslant M_2\|\omega_k\|^2_{W_1^{-1}}.$$

Учитывая последние неравенства, имеем

$$\|\omega_{k+1}\|^2_{W_1^{-1}} \leqslant \|\omega_k\|^2_{W_1^{-1}} - 2qm_1m_2\|\omega_k\|^2_{W_1^{-1}} + q^2M_1M_2\|\omega_k\|^2_{W_1^{-1}} =$$

$$= (1 - 2qm_1m_2 + q^2M_1M_2)\|\omega_k\|^2_{W_1^{-1}}.$$

Положив теперь $q = \dfrac{m_1m_2}{M_1M_2}$, окончательно получаем

$$\|\omega_{k+1}\|_{W_1^{-1}} \leqslant \theta\|\omega_k\|_{W_1^{-1}}, \quad \theta = \left[1 - \frac{(m_1m_2)^2}{M_1M_2}\right]^{\frac{1}{2}} < 1,$$

т. е. итерационный процесс (11) сходится в $H_{W_1^{-1}}$ (и в $H$, что следует из (14)) со скоростью геометрической прогрессии к решению уравнения (12), что и требовалось доказать.

Итак, метод решения больших систем линейных алгебраических уравнений состоит из следующих этапов.

I. Находим решение системы уравнений (10) гауссовским методом исключения. На этом этапе получаем начальное приближение для итерационного процесса (11), матрицу перестановок $V$ и разложение (6).

II. По матрице $T_0$ из (6) строим матрицу $T = D_0T_0D_0^{-1}$ такую, чтобы выполнялось неравенство (7), т. е. на этом этапе фактически находится матрица $D_0$, которая принимает участие в итерационном процессе (11).

III. Уточняем решение $x_0$ итерационным методом (11).

В заключение отметим, что, так как матрицы, у которых собственные числа содержатся внутри правой полуплоскости, играют большое значение, например в теории автоматического регулирования и оптимального управления, то полученные выше результаты могут найти свое приложение при изучении синтеза устойчивых систем.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, «Наука», М., 1967.
2. W. V. Petryshyn, On the Extrapolated Yacobi or semoltaneows Displacements Math. in the Sol. of Matr. and Operator Equat., Math. of Comp., vol. 19, N 89, 1965.
3. В. Г. Мишутин, К вопросу сходимости методов уравновешивания альфа-модели, Кибернетика, № 4, 1969.
4. Дж. Форсайт, К. Моллер, Численное решение систем линейных алгебраических уравнений, «Мир», М., 1969.



Поступила 22.X 1971 г.,
после переработки — 7.III 1973 г.


Институт кибернетики АН УССР