УДК 519.40

Абстрактная характеристика матричных оперативов

А. К. Слипенко

Теория позиционных оперативов [1] — естественное обобщение теории групп, полугрупп, полугруд и некоторых других алгебр с одной операцией, удовлетворяющей условиям типа ассоциативности — рассматривалась в работах [2, 3] как абстрактная теория отображений нескольких множеств друг в друга. Вполне естественным является вопрос о построении и изучении матричных позиционных оперативов [4].

В данной заметке дана абстрактная характеристика важнейших классов матричных оперативов. Полученные результаты аналогичны соответствующим результатам Л. М. Глускина для полугрупп [5].

1. Основные определения, касающиеся абстрактных позиционных оперативов, см. в работах [1, 2]. Элементами матричных позиционных оперативов [4] являются «векторы», состоящие из прямоугольных матриц: $\mathfrak{A}_i = (A_1^i, A_2^i, \ldots, A_s^i)$; характер n-арной операции $[\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\ldots\mathfrak{A}_n] = \mathfrak{A}$ (умножения) определяется правилом построения j-й компоненты вектор-произведения $\mathfrak{A}$:

$$A_j = A_{l_{1j}}^{i_{1j}} \cdot A_{l_{2j}}^{i_{2j}} \ldots A_{l_{kj}}^{i_{kj}}, \tag{1}$$

где каждый верхний индекс в правой части равенства определяет номер вектор-сомножителя, а нижний — номер компоненты сомножителя; $k = k(j)$. В работе [4] показано, что при некоторых естественных условиях матричные оперативы являются ассоциативами (n-полугруппами), либо альтернативами (n-полугрудами), которые, в свою очередь, разлагаются в прямое произведение неприводимых оперативов. Неприводимые матричные оперативы (ассоциативы и альтернативы — только они будут рассматриваться в работе) несущественно отличаются от некоторых стандартных.

2. Матричный позиционный оператив $\mathfrak{P}$ с элементами $\mathfrak{A}_i = (A_1^i, A_2^i, \ldots, A_d^i)$, $d/n - 1$, называется стандартным, если j-я компонента произведения $\mathfrak{A} = [\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\ldots\mathfrak{A}_n]$ образуется по формуле

$$A_j = A_j^1 \cdot A_{j+1}^2 \cdot A_{j+2}^3 \cdot \ldots \cdot A_{j-1}^{n-1} A_j^n \tag{2}$$

для ассоциативов, а также для альтернативов при j нечетном, и

$$A_j = A_j^n \cdot A_{j+1}^{n-1} \cdot A_{j+2}^{n-2} \cdot \ldots \cdot A_{j-1}^2 \cdot A_j^1, \tag{3}$$

если $\mathfrak{P}$ альтернатив и j четно. Нижние индексы в (2), (3) берутся по mod d. Обозначим через $E^{ij} = (E_1^{ij}, E_2^{ij}, \ldots, E_d^{ij})$ такой элемент оператива $\mathfrak{P}$, что каждая компонента $E_k^{ij} = \|l_{ij}\|$ содержит в i-й строке и j-м столбце единицу (если позволяют размеры матрицы), а все остальные элементы равны нулю. Пусть $\mathfrak{P}^r$ — подмножество векторов оператива $\mathfrak{P}$, компоненты которых имеют ранг, не превышающий r. Легко показать, что $\mathfrak{P}^r$ является идеалом $\mathfrak{P}$. Гомоморфизм оперативов определяется обычным образом. Если φ — гомоморфизм оператива Ω в оператив $\mathfrak{P}$, то гомоморфный образ элемента $a \in \Omega$ запишем в виде

$$a\varphi = ((a\varphi)_1, (a\varphi)_2, \ldots, (a\varphi)_d) = (a\varphi_1, a\varphi_2, \ldots, a\varphi_d).$$

3. Т е о р е м а 1. *Пусть Φ — подоператив стандартного матричного оператива $\mathfrak{P}$. Пусть некоторый оператив Ω содержит Φ и $\mathfrak{P}^k$ — идеал в Ω. Тогда существует гомоморфизм оператива Ω в $\mathfrak{P}$, индуцирующий тождественный автоморфизм оператива Φ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем его для ассоциатива. Пусть $a \in \Omega$. Обозначим $\overset{ik}{\mathfrak{A}} = [\overset{i1}{E}\overset{11}{E} \ldots \overset{11}{E}\overset{1i}{E}a\overset{k1}{E}\overset{11}{E} \ldots \overset{11}{E}\overset{1k}{E}]$, где элемент $\overset{11}{E}$ повторяется в каждом случае $n-3$ раза. Так как $\overset{ij}{E} \in \mathfrak{P}^r$, а $\mathfrak{P}^r$ — идеал в Ω, то $\overset{ik}{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{P}^r$. Если $(\overset{ik}{\mathfrak{A}})j$ — j-я компонента вектора $\overset{ik}{\mathfrak{A}}$, то, очевидно, $(\overset{ik}{\mathfrak{A}})_j = [\overset{i1}{E}\overset{11}{E} \ldots \overset{1i}{E}\overset{i1}{E}\overset{11}{E} \ldots$ $\ldots \overset{1i}{E}a\overset{k1}{E}\overset{11}{E} \ldots \overset{1k}{E}\overset{k1}{E}\overset{11}{E} \ldots \overset{1k}{E}]$. Поэтому $(\overset{ik}{\mathfrak{A}})_j = \alpha_{ik}(\overset{ik}{E})_j$. Положим $a\varphi_j = \|\alpha_{ik}\|_j$ и $a\varphi = (\|\alpha_{ik}\|_1, \ldots, \|\alpha_{ik}\|_d) = \|\overline{\alpha_{ik}}\|$. Исходя из формул (2), (3), легко показать, что $(\|\alpha_{ik}\|_1, \ldots, \|\alpha_{ik}\|_d)\varphi = (\|\alpha_{ik}\|_1, \ldots, \|\alpha_{ik}\|_d)$.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \Omega$, $a_l\varphi = (\|\alpha_{ik}^l\|_1, \ldots, \|\alpha_{ik}^l\|_d)$, $l = 1, 2, \ldots, n$, и $[a_1a_2 \ldots a_n]\varphi = (\|\lambda_{ik}\|_1, \ldots, \|\lambda_{ik}\|_d)$. Обозначим $[\overset{p1}{E}\overset{11}{E} \ldots \overset{1p}{E}a_1]_j = \|\gamma_{ik}\|_j$. Из $[\overset{p1}{E}\overset{11}{E} \ldots \overset{1p}{E}\overset{p1}{E}\overset{11}{E} \ldots \overset{1p}{E}a_1] = [\overset{p1}{E}\overset{11}{E} \ldots \overset{1p}{E}a_1]$ следует, что $\gamma_{ik} = 0$ в $\|\gamma_{ik}\|$ при $i \neq p$. В то же время $\gamma_{ps}(\overset{ps}{E})_j = [\overset{p1}{E}\overset{11}{E} \ldots \overset{1p}{E}(\|\gamma_{ik}\|_1, \ldots, \|\gamma_{ik}\|_d)\overset{s1}{E}\overset{11}{E} \ldots \overset{1s}{E}]_j = [\overset{p1}{E}\overset{11}{E} \ldots$ $\ldots \overset{1p}{E}\overset{p1}{E}\overset{11}{E} \ldots \overset{1p}{E}a_1\overset{s1}{E}\overset{11}{E} \ldots \overset{1s}{E}]_j = \alpha_{ps}(\overset{ps}{E})_j$, значит $[\overset{p1}{E}\overset{11}{E} \ldots \overset{1p}{E}a_1]_j = \|\alpha_{ik}^1\|_j$. Точно так же $[a_n\overset{s1}{E}\overset{11}{E} \ldots \overset{1s}{E}]_j = \|\alpha_{ik}^n\|_j$.

Обозначим $[\overset{11}{E} \ldots \overset{11}{E}\overset{1p}{E}\|\overline{\alpha'_{ik}}\|a_2]_j = \|\beta_{ik}\|_j$, $\|\overline{\beta_{ik}}\| \in \mathfrak{P}^r$, $\beta_{tl}(\overset{ts}{E})_j = [\overset{t1}{E}\overset{11}{E} \ldots$ $\ldots \overset{1t}{E}\|\overline{\beta_{ik}}\|\overset{s1}{E}\overset{11}{E} \ldots \overset{1s}{E}]_j = [\overset{1t}{E}\overset{11}{E} \ldots \overset{1t}{E}[\overset{11}{E} \ldots \overset{1p}{E}\|\overline{\alpha_{ik}^1}\|a_2]\overset{s1}{E}\overset{11}{E} \ldots \overset{1s}{E}]_j = [\overset{t1}{E}\overset{11}{E} \ldots \overset{1t}{E}\overset{11}{E} \ldots$ $\ldots \overset{1p}{E}\|\overline{\alpha_{ik}^1}\|[a_2\overset{s1}{E}\overset{11}{E} \ldots \overset{1s}{E}]]_j = \begin{cases} 0, & \text{если } t \neq 1, \\ \sum\limits_k \alpha_{pk}^1\alpha_{kl}^2(\overset{1s}{E})_j, & \text{если } t = 1, \end{cases}$ т. е. $[\overset{11}{E} \ldots \overset{11}{E}\overset{1p}{E}\|\overline{\alpha_{ik}^1}\|a_2]_j =$ $= [\overset{11}{E} \ldots \overset{11}{E}\overset{1p}{E}\|\overline{\alpha_{ik}^1}\|\|\overline{\alpha_{ik}^2}\|]_j$. Продолжая подобные рассуждения, получим $[\overset{1p}{E}\|\overline{\alpha_{ik}^1}\| \ldots \|\overline{\alpha_{ik}^{n-2}}\|a_{n-1}]_j = [\overset{1p}{E}\|\overline{\alpha_{ik}^1}\| \ldots \|\overline{\alpha_{ik}^{n-1}}\|]_j$. Учитывая эти равенства, на основании (2) имеем: $\lambda_{ps}(\overset{ps}{E})_j = [\overset{p1}{E}\overset{11}{E} \ldots \overset{1p}{E}[a_1a_2 \ldots a_n]\overset{s1}{E}\overset{11}{E} \ldots \overset{1s}{E}]_j = [\overset{p1}{E}\overset{11}{E} \ldots$ $\ldots \overset{1p}{E}\|\overline{\alpha_{ik}^1}\|\|\overline{\alpha_{ik}^2}\| \ldots \|\overline{\alpha_{ik}^n}\|\overset{s1}{E}\overset{11}{E} \ldots \overset{1s}{E}]_j = \sum\limits_{k, l, \ldots, m} \alpha_{pk}^1\alpha_{kl}^2 \ldots \alpha_{ms}^n(\overset{ps}{E})_j$, т. е. $[a_1a_2 \ldots$ $\ldots a_n]\varphi = [a_1\varphi a_2\varphi \ldots a_n\varphi]$; φ является гомоморфизмом.

В случае, если $\mathfrak{P}$ — альтернатив, доказательства аналогичны.

4. Идеал P оператива A называется плотно вложенным, если:

а) всякий нетривиальный гомоморфизм (не являющийся изоморфизмом) A индуцирует нетривиальный гомоморфизм P;

б) если оператив T содержит A в качестве собственного подоператива и P — идеал в T, то для T существует нетривиальный гомоморфизм, индуцирующий изоморфизм оператива P.

Теорема 2. *Оперативы* $\mathfrak{P}^k$, $k \geqslant 1$, *являются плотно вложенными идеалами матричного стандартного оператива* $\mathfrak{P}$.

Доказательство. Если φ — нетривиальный гомоморфизм оператива $\mathfrak{P}$, тогда найдутся два вектора $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \in \mathfrak{P}$ таких, что $\mathfrak{A}_1\varphi = \mathfrak{A}_2\varphi$, но $\mathfrak{A}_1 \neq \mathfrak{A}_2$. Так как $\mathfrak{A}_1 \neq \mathfrak{A}_2$, то при некотором j $(\mathfrak{A}_1)_j \neq (\mathfrak{A}_2)_j$. Если $(\mathfrak{A}_1)_j = \| \delta_{ik} \|$, $(\mathfrak{A}_2)_j = \| \mu_{ik} \|$, то существует пара индексов p, s таких, что $\delta_{ps} \neq \mu_{ps}$, а, значит, $\delta_{ps} (\overset{ps}{E})_j \neq \mu_{ps}(\overset{ps}{E})_j$. Теперь из $[\overset{p1}{E}\varphi \overset{11}{E}\varphi \ldots \overset{1p}{E}\varphi\mathfrak{A}_1\varphi\overset{s1}{E}\varphi \ldots \overset{1s}{E}\varphi] = [\overset{p1}{E}\varphi\overset{11}{E}\varphi \ldots \overset{1p}{E}\varphi\mathfrak{A}_2\varphi\overset{s1}{E}\varphi\overset{11}{E}\varphi \ldots \overset{1s}{E}\varphi]$ следует, что $[\overset{p1}{E}\overset{11}{E} \ldots \overset{1p}{E}\mathfrak{A}_1\overset{s1}{E}\overset{11}{E} \ldots \overset{1s}{E}]\varphi = [\overset{p1}{E}\overset{11}{E} \ldots \overset{11}{E}\mathfrak{A}_2\overset{s1}{E}\overset{11}{E} \ldots \overset{1s}{E}]\varphi$. Но $[\overset{p1}{E}\overset{11}{E} \ldots \overset{1p}{E}\mathfrak{A}_1\overset{s1}{E}\overset{11}{E} \ldots \overset{1s}{E}] \neq [\overset{p1}{E}\overset{11}{E} \ldots \overset{1p}{E}\mathfrak{A}_2\overset{s1}{E}\overset{11}{E} \ldots \overset{1s}{E}]$, так как j-ми компонентами этих векторов (содержащихся в $\mathfrak{P}^k$) являются матрицы $\delta_{ps}(\overset{ps}{E})_j$ и $\mu_{ps}(\overset{ps}{E})_j$. Таким образом, гомоморфизм φ индуцирует нетривиальный гомоморфизм идеала $\mathfrak{P}^k$.

Пусть Ω — произвольный оператив, содержащий $\mathfrak{P}$ в качестве собственного подоператива, а $\mathfrak{P}^k$ — идеал Ω, тогда из теоремы 1 вытекает существование гомоморфизма φ оператива Ω в стандартный матричный оператив $\mathfrak{P}$, для которого $\mathfrak{A}\varphi = \mathfrak{A}$ при любом $\mathfrak{A} \in \mathfrak{P}$. Если a — какой-либо элемент из Ω, не содержащийся в $\mathfrak{P}$, и $a\varphi = \mathfrak{A}$, то $a\varphi = \mathfrak{A}\varphi$, следовательно, φ — нетривиальный гомоморфизм оператива Ω, индуцирующий изоморфизм на $\mathfrak{P}$, а значит, и на $\mathfrak{P}^k$.

Теперь из теоремы 2 и результатов работы [6] вытекает следующая теорема.

Теорема 3. *Оператив* Ω *тогда и только тогда изоморфен стандартному матричному оперативу* $\mathfrak{P}$, *когда он содержит ненулевой минимальный плотно вложенный идеал, изоморфный* $\mathfrak{P}^1$.

Замечание. В работе [4] матричные оперативы рассматриваются над некоторым полем характеристики 0. Результаты данной заметки справедливы для произвольных тел.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Глускин, О позиционных оперативах, ДАН СССР, т. 157, № 4, 1964.
2. А. К. Слiпенко, Позицiйнi оперативи вiдображень, ДАН УРСР, сер. А, № 2, 1969.
3. А. К. Слiпенко, Зображення оперативiв, ДАН УРСР, сер. А, № 3, 1970.
4. А. К. Слипенко, Матричные оперативы, XII Всесоюзный алгебраический коллоквиум (Тезисы сообщений), Тетрадь 2, Свердловск, 1973.
5. Л. М. Глускин, О матричных полугруппах, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 22, № 3, 1958.
6. Л. М. Глускин, О плотных вложениях, Матем. сб., 61(103), вып. 2, 1963.

Поступила 18.V 1972 г.

Донецкий государственный университет