УДК 518:517.948

О приближении решений интегральных уравнений Фредгольма второго рода в пространстве L_p

М. И. Хуссейн

В данной статье, используя метод, развитый В. К. Дзядыком для приближения полиномами решений интегральных уравнений Фредгольма для случая равномерной метрики, получаем аналогичные результаты в L_p.

Пусть задано интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{-\pi}^{\pi} K(x, y)\,\varphi(y)\,dy, \tag{1}$$

в котором все функции являются 2π-периодическими по x и y, число 1 не является собственным числом ядра $K(x, y)$, $f(x) \in L_p$, $1 \leqslant p < \infty$, и ядро $K(x, y)$ удовлетворяет условию

$$\|K(x, y)\|_{L_r} = \left\{\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |K(x, y)|^r\,dxdy\right\}^{\frac{1}{r}} = c(r) < \infty, \tag{2}$$

где $r = \max\left\{p, \dfrac{p}{p-1}\right\}$.

Известно (см. [1, стр. 327]), что оператор K вполне непрерывен и действует из пространства L_p в пространство L_p.

Отправляясь от известных линейных полиномиальных операторов $U_n(\psi; x)$ хорошего приближения функций $\psi(x)$ в пространстве L_p вида

$$U_n(\psi; x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi(t)\,U_n(x-t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x-t)\,U_n(t)\,dt, \tag{3}$$

где

$$U_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(\lambda_k^{(n)} \cos kx + \mu_k^{(n)} \sin kx\right), \tag{4}$$

строится интегральное уравнение с вырожденным ядром

$$\varphi_n(x) = U_n(f; x) + \int_{-\pi}^{\pi} U_n(K(\xi, y); x)\,\varphi_n(y)\,dy. \tag{5}$$

Поскольку обе функции $U_n(f; x)$ и $U_n(K(\xi, y); x)$ представляют собой тригонометрические полиномы порядка n по x, то решение $\varphi_n(x)$ уравнения (5) также представляет собой тригонометрический полином порядка n.

Определение. 1. Частным модулем непрерывности ядра $K(x, y)$, заданного в квадрате $-\pi \leqslant x,\ y \leqslant \pi$, будем называть следующую, определенную на $[0, 2\pi]$, функцию:

$$\omega_{L_r}(t) = \omega_{L_r}(K; t) = (2\pi)^{-\frac{2}{r}} \sup_{|u| \leqslant t} \left\{\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |K(x+u, y) - K(x, y)|^r\,dxdy\right\}^{\frac{1}{r}}. \tag{6}$$

Для всех ядер $K(x, y)$, которые порождают вполне непрерывные операторы, функция $\omega_{L_r}(t)$ обладает следующими свойствами (см. [2, стр. 124]):

$$\omega_{L_r}(0) = 0, \quad \omega_{L_r}(t) \nearrow, \quad \omega_{L_r}(t_1 + t_2) \leqslant \omega_{L_r}(t_1) + \omega_{L_r}(t_2),$$

$$\omega_{L_r}(t) \in C \text{ и } \omega_{L_r}(\lambda t) \leqslant (1 + \lambda)\,\omega_{L_r}(t).$$

2. Обозначим через $\delta(K;\ U_n;\ r)$ и $\varepsilon(K;\ U_n;\ \varphi)$ интегралы (см. [3, стр. 473; 4])

$$\delta(K;\ U_n;\ r) = (2\pi)^{\theta} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K(x, y) - U_n(K(\xi, y); x)|^r \, dxdy \right\}^{\frac{1}{r}}, \tag{7}$$

$$\varepsilon(K;\ U_n;\ \varphi) = \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} K(x, y)\,[\varphi(y) - U_n(\varphi;\ y)]\, dy \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{8}$$

где $\theta = 1 - \frac{2}{r}$, и при каждом натуральном m через γ_m — величину

$$\gamma_m = \gamma_m(U_n;\ \varphi) = \sum_{i=1}^{m} \left(|1 - \lambda_i^{(n)}| + |\mu_i^{(n)}|\right) E_{i-1}(\varphi)_{L_p}, \tag{9}$$

где $\varphi(x) \in L_p$, $E_n(\varphi) = \inf\limits_{p_n(x)} \|\varphi(x) - p_n(x)\|_{L_p}$, $m \leqslant n$.

Теорема 1. *Каков бы ни был линейный полиномиальный оператор $U_n(f;\ x)$ и каково бы ни было суммируемое в r-й степени ядро $K(x, y)$, всегда имеют место неравенства*

$$\delta(K;\ U_n;\ r) \leqslant 2\omega_{L_r}\left(K;\ \frac{1}{n}\right) \int_{-\pi}^{\pi} |U_n(t)|\ (n|t| + 1)\, dt, \tag{10}$$

$$\varepsilon(K;\ U_n;\ \varphi) \leqslant (2\pi)^{\theta} \{E^{*}_{\infty,m}(K)_{L_r} \|\varphi(y) - U_n(\varphi;\ y)\|_{L_p} + $$
$$+ 2\gamma_m(U_n;\ \varphi)\,[\|K\|_{L_r} + E^{*}_{\infty,m}(K)_{L_r}]\}. \tag{11}$$

Покажем, что при всех достаточно хороших линейных методах $U_n(f;\ x)$ полиномы $\varphi_n(x)$ достаточно мало отличаются от искомого решения $\varphi(x)$ уравнения (1).

Теорема 2. *Если ядро $K(x, y)$ уравнения (1) удовлетворяет условию (2), а все функции, фигурирующие в (1), являются 2π-периодическими по x и 1 не является собственным числом ядра $K(x, y)$, то, каков бы ни был линейный полиномиальный оператор $U_n(f;\ x)$, при замене уравнения (1) уравнением (5) тригонометрический полином $\varphi_n(x)$ порядка n, являющийся его решением, будет приближать решение $\varphi(x)$ исходного уравнения так, что будет выполняться неравенство*

$$\|\varphi(x) - \varphi_n(x)\|_{L_p} \leqslant (1 + \alpha_n)\|\varphi(x) - U_n(\varphi;\ x)\|_{L_p}, \tag{12}$$

в котором

$$\alpha_n = R\frac{\delta(K;\ U_n;\ r) + \dfrac{\varepsilon(K;\ U_n;\ \varphi)}{\|\varphi(x) - U_n(\varphi;\ x)\|}}{1 - R\delta(K;\ U_n;\ r)}, \tag{13}$$

где $\delta(K;\ U_n;\ r)$ и $\varepsilon(K;\ U_n;\ \varphi)$ определяются соответственно при помощи равенств (7), (8) *и* $R = [1 + (2\pi)^{\theta}\|R(x, y)\|_{L_r}]$, $\theta = 1 - \frac{2}{r}$, *через* $R(x, y)$ *обозначена резольвента уравнения* (1).

Применяя эту теорему, а также теорему 1, получим следующие утверждения:

1) в случае метода Дирихле:

$$\alpha_n \leqslant R\,\frac{12\pi(3 + \ln n)\,\omega_{L_r}\left(K;\ \frac{1}{n}\right) + E^{*}_{\infty,m}}{1 - 12\pi R(3 + \ln n)\,\omega_{L_r}\left(K;\ \frac{1}{n}\right)}$$

и при этом для стремления α_n к нулю достаточно, чтобы выполнялись условия $\omega_{L_r}\left(K;\ \frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{\ln n}\right)$;

2) в случае метода Валле-Пуссена:

$$\alpha_n \leqslant R\frac{33{,}6\omega_{L_r}\left(K;\ \frac{1}{n}\right) + E^*_{\infty,m}}{1 - 33{,}6R\omega_{L_r}\left(K;\ \frac{1}{n}\right)}$$

и $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$ для любого решения $\varphi(x) \in L_p$ и любого ядра $K(x, y) \in L_r$;

3) в случае метода Фейра величина α_n будет стремиться к нулю, если выполняется условие:

$$\varphi(x) \in W^{(0)}H^{\alpha}(L_p), \qquad \text{т. е. } r = 0,\ 0 < \alpha \leqslant 1;$$

4) в случае методов Джексона и Рогозинского величина α_n будет стремиться к нулю, если выполняется условие:

$$\varphi(x) \in W^{(r)}H^{\alpha}(L_p), \qquad r + \alpha < 2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, М., 1959.
2. А. Ф. Тиман, Теория приближения функций действительного переменного, Физматгиз, М., 1960.
3. В. К. Дзядык, О применении линейных методов к приближению полиномами функций, являющихся решениями интегральных уравнений Фредгольма второго рода. I, УМЖ, т. 22, № 4, 1970.
4. В. К. Дзядык, О применении линейных методов к приближению полиномами функций, являющихся решениями интегральных уравнений Фредгольма второго рода. II, УМЖ, т. 22, № 5, 1970.

Поступила 4.X 1971 г.

Киевский государственный университет