УДК 517.54

О задаче Римана—Гильберта с ненулевым индексом для n-связной круговой области

Л. Е. Дундученко, В. И. Поряденная

1. Пусть K_n — n-связная область, содержащая $z=\infty$ и ограниченная окружностями Γ_k: $|z-a_k|=R_k$; $|a_k-a_j|>R_k+R_j$, $k\neq j$, $k, j=1,\ldots,n$; $\overline{K}_n$ — замыкание области K_n $(n\geqslant 3)$. Будем искать регулярную и однозначную в K_n функцию $w=f(z)=u+iv$, непрерывную в $\overline{K}_n$, если ее вещественная и мнимая части удовлетворяют на ∂K_n условиям:

$$l_k(\theta)\,u(a_k+R_ke^{i\theta})+m_k(\theta)\,v(a_k+R_ke^{i\theta})=p_k(\theta),$$
$$\theta=\arg(\zeta_k-a_k),\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ \zeta_k\in\Gamma_k,\qquad k=1,\ldots,n, \tag{1}$$

где $l_k(\theta)$, $m_k(\theta)$ и $p_k(\theta)$ — заданные на отрезке $[0, 2\pi]$ функции, подчиняющиеся определенным условиям, о которых скажем позднее, а сейчас лишь заметим, что они непрерывные и периодические с периодом 2π и, кроме того,

$$l_k^2(\theta)+m_k^2(\theta)\neq 0,\qquad k=1,\ldots,n.$$

Без ограничения общности можно положить

$$l_k(\theta)=\cos\omega_k(\theta),\quad m_k(\theta)=-\sin\omega_k(\theta),$$

где $\omega_k(\theta)$, $k=1,\ldots,n$, — непрерывные функции, подчиняющиеся условию

$$\omega_k(\theta+2\pi)=\omega_k(\theta)+2\nu_k\pi,\quad \sum_{k=1}^{n}\nu_k=q, \tag{2}$$

$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, ν_k $(k=1,\ldots,n)$, q — целые числа, причем $q\neq 0$, так как случай $q=0$ уже исследован [1].

Условия (1) можно короче записать так:

$$\operatorname{Re}[f(a_k+R_ke^{i\theta})\,e^{i\omega_k(\theta)}]=p_k(\theta),\qquad k=1,\ldots,n.$$

Решению этой краевой задачи для многосвязных областей посвящено много работ [2—4] и др., (см., например, библиографию в работе [4]). Первое решение этой задачи дали М. В. Келдыш и Л. И. Седов [2]. Но, насколько нам известно, нигде не ставился вопрос о таком ее решении, которое допускало бы вычислительную обработку с априорной погрешностью для областей K_n при условии, что $n\geqslant 3$. Тем не менее важность с прикладной точки зрения такого приближения несомненна. В данной работе авторы приводят именно такое решение этой проблемы для многосвязных круговых областей K_n при условии, что $n \geqslant 3$. Ввиду простоты приводимого решения, нам кажется, что оно представляет не только прикладной, но и теоретический интерес.

Для решения подставленной задачи понадобятся следующие функции:

а) $w = \theta_j(z)$, $j = 1, \ldots, n-1$, — однолистные функции, отображающие K_n на кольца $q_{j_j} < |w| < 1$, так что Γ_n переходит в $|w| = 1$, а Γ_j — в $|w| = q_{j_j}$; остальные Γ_k, $k = 1, \ldots, n-1$, $k \neq j$, переходят в разрезы по дугам окружностей $|w| = q_{k_j}$; $q_{k_j} > q_{j_j}$; $q_{k_j} < 1$. Эти функции имеют вид:

$$\theta_j(z) = \frac{z - a_j}{z - a_n} \cdot e^{f(z)},$$

где

$$f(z) = A + \sum_{k=1}^{n} \Phi_k(z) + \sum_{k=1}^{n} \sideset{}{''}\sum_{\nu=2}^{+\infty} \sum_{\substack{k_\nu=1 \\ (k_\nu \neq k)}}^{n} \cdots \sum_{\substack{k_1=1 \\ (k_1 \neq k_2)}}^{n} \{\Phi_k([k_1, \ldots, k_\nu, z] -$$

$$- \Phi_k([k_1, \ldots, k_\nu, \infty])\} - \sum_{k=1}^{n} \sideset{}{'}\sum_{\nu=1}^{+\infty} \sum_{\substack{k_\nu=1 \\ (k_\nu \neq k)}}^{n} \cdots \sum_{\substack{k_1=1 \\ (k_1 \neq k_2)}}^{n} \{\overline{\Phi}_k([k_1, \ldots, k_\nu, z]) -$$

$$-\overline{\Phi}_k([k_1, \ldots, K_\nu, \infty])\}, \tag{3}$$

$$\Phi_k(z) = \begin{cases} -\ln\left(1 + \dfrac{R_n^2}{(\overline{a}_n - \overline{a}_j)(z - a_n)}\right), & k = n; \\[2ex] \ln\left(1 + \dfrac{R_k^2}{(\overline{a}_k - \overline{a}_n)(z - a_k)}\right) - \ln\left(1 + \dfrac{R_k^2}{(\overline{a}_k - \overline{a}_j)(z - a_k)}\right), & k \neq n, j; \\[2ex] \ln\left(1 + \dfrac{R_j^2}{(\overline{a}_j - \overline{a}_n)(z - a_j)}\right), & k = j. \end{cases}$$

Здесь знак ($''$) указывает на то, что сумма берется только по четным значкам, а знак ($'$) — на то, что суммируем только по нечетным значкам. Кроме того, использованы общепринятые обозначения для цепных дробей [5].

б) $w = H(z)$ — функция, однолистно отображающая K_n на круг $|w| < 1$ с разрезами по дугам окружностей $|w| = r_k$, $0 < r_k < 1$, $k = 1, \ldots, n-1$, так что Γ_n переходит в $|w| = 1$ и точка $z = \infty$ переходит в точку $w = 0$. Эта функция построена в [6] и имеет вид:

$$H(z) = (z - a_n)^{-1} e^{f(z)},$$

причем $f(z)$ записывается по формуле (3), где

$$\Phi_k(z) = \ln\left(1 + \frac{R_k^2}{(\overline{a}_k - \overline{a}_n)(z - a_k)}\right), \ k = 1, \ldots, n-1; \ \Phi_n(z) = 0.$$

в) $w = \zeta_k(z)$, $k = 1, \ldots, n$, — однолистные функции, отображающие K_n на w-плоскость с разрезами вдол отрезков мнимой оси, так что Γ_n переходит в фиксированный отрезок. Следовательно, при $k \neq j$ Γ_n отображается функциями $\zeta_k(z)$ и $\zeta_j(z)$ в различные отрезки: $k, j = 1, \ldots, n$. Кроме того, в окрестности точки $z = \infty$ функции $\zeta_k(z)$ имеют разложения:

$$\zeta_k(z) = z + \beta_0^{(k)} + \frac{\beta_1^{(k)}}{z} + \ldots, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Для построения функции $\zeta_k(z)$ при фиксированном k воспользуемся функцией $\psi_k(z)$, построенной Голузиным [5] и совершающей однолистное конформное отображение области K_n на w-плоскость с n прямолинейными и параллельными действительной оси разрезами.

Эта функция имеет вид:

$$\psi_k(z) = z + f(z),$$

$f(z)$ — определяется по формуле (3), где $\Phi_k(z) = R_k^2 (z - a_k)^{-1}$, $k = 1, \ldots, n$. Заметим, что если все центры окружностей $|z - a_k| = R_k$, $k = 1, \ldots, n$, лежат на действительной оси, то и все разрезы отображения лежат на действительной оси [5], поэтому в дальнейшем считаем, что $\operatorname{Im} a_k = 0$, $k = 1, \ldots, n$. В таком случае можно положить

$$\zeta_k(z) = i\psi_k(z).$$

2. Будем решать задачу Римана — Гильберта с ненулевым индексом. Исследуем два случая: $q \geqslant 1$ и $q \leqslant -1$ (см. (2)).
Пусть $q \geqslant 1$. Рассмотрим функции

$$\psi_k(\theta) = \omega_k(\theta) - \sum_{j=1}^{n-1} \nu_j \arg \theta_j (a_k + R_k e^{i\theta}) + q \arg H(a_k + R_k e^{i\theta}),$$
$$k = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Исходя из свойств функций $\theta_j(z)$, $j = 1, \ldots, n-1$, $H(z)$, и условий (1), легко видеть, что

$$\psi_k(\theta + 2\pi) = \psi_k(\theta), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Рассматривая $\psi_k(z)$ как значения вещественной части на ∂K_n некоторой регулярной и однозначной в K_n функции $\pi(z)$, можем с помощью формулы Шварца [7] написать

$$\pi(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_0^{2\pi} \psi_k(\theta) F_k(z, a_k + R_k e^{i\theta}) \, d\theta - \alpha_\pi + i\beta_\pi, \tag{5}$$

причем

$$\alpha_\pi = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_0^{2\pi} \psi_k(\theta) \operatorname{Re} F_k(a_j + R_j e^{i\varphi}, \zeta_k) \, d\theta = \text{const}$$

при любом $j, j = 1, \ldots, n$ (это условия, которым должны удовлетворять функции $\omega_k(\theta)$, $k = 1, \ldots, n$). Постоянную β_π можем считать равной нулю. Это, как показывает анализ полученного ниже решения, не ограничивает общности. Здесь ядерные функции $w = F_k(z, \zeta_k)$, $\zeta_k = a_k + R_k e^{i\theta}$, достаточно подробно изучены в работах [7—9], а именно, в работе [7] установлено, что при фиксированном параметре θ, $0 < \theta \leqslant 2\pi$, $w = F_k(z, a_k + R_k e^{i\theta})$ однолистно отображает K_n на правую полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$ так, что каждая из граничных окружностей Γ_j, $j \neq k$, $j = 1, \ldots, n$, переходит в отрезок прямой, параллельной мнимой оси, окружность Γ_k переходит при этом в мнимую ось $\operatorname{Re} w = 0$ и в окрестности точки $\zeta_k = a_k + R_k e^{i\theta}$ $w = F_k(z, \zeta_k)$ имеет разложение:

$$F_k(z, \zeta_k) = \frac{z + \zeta_k - 2a_k}{z - \zeta_k} + \varphi_k(z, \zeta_k).$$

Здесь $\varphi_k(z, \zeta_k)$ регулярна в некотором кольце $R_k(1-\delta) < |z - a_k| < R_k(1+\delta)$, $\delta > 0$—некоторое достаточно малое число, не зависящее от „k“, и удовлетворяет условиям:

$$\operatorname{Re} \varphi_k(z, \zeta_k)|_{z \in \Gamma_k} = 0, \quad \varphi_k(\zeta_k, \zeta_k) = 0.$$

В работе [8] эти функции построены в виде некоторых достаточно простых по конструкции функциональных рядов, сходящихся равномерно на любом компакте из K_n, а в работе [9] показано, что абсциссы граничных разрезов при отображении $w = F_k(z, \zeta_k)$ изменяются при изменении параметра θ (для довольно широкого класса областей K_n, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$).

Таким образом, как нетрудно понять, все ниже приведенные построения носят конструктивный характер и допускают достаточно простую вычислительную обработку, чего мы не наблюдаем в работах, посвященных проблеме Римана — Гильберта для n-связной круговой области при условии, что $n \geqslant 3$.

Положим, что $\pi(z)$ непрерывна в $\overline{K}_n$ и обозначим

$$\lambda_k(\theta) = \lim_{z \to \zeta_k} \operatorname{Im} \pi(z) = \operatorname{Im} \pi(a_k + R_k e^{i\theta}), \quad k = 1, \ldots, n,$$

т. е. $\pi(a_k + R_k e^{i\theta}) = \omega_k(\theta) + i\lambda_k(\theta)$. Обозначим однозначную аналитическую в K_n функцию:

$$\xi(z) = f(z) \prod_{j=1}^{n-1} [\theta_j(z)]^{\nu_j} e^{i\pi(z)} H^{-q}(z). \tag{6}$$

Эта функция имеет в K_n единственный полюс порядка q в точке $z = \infty$, кроме того, она непрерывна на ∂K_n по предположению об искомой функции $f(z)$. На ∂K_n имеем:

$$\operatorname{Re}\left\{f(a_k + R_k e^{i\theta}) \prod_{j=1}^{n-1} [\theta_j(a_k + R_k e^{i\theta})]^{\nu_j} e^{i\pi(a_k + R_k e^{i\theta})} H^{-q}(a_k + R_k e^{i\theta})\right\} =$$

$$= s_k r_k^{-q} e^{-\lambda_k(\theta)} p_k(\theta), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{7}$$

где $s_k = \prod_{j=1}^{n-1} |\theta_j(a_k + R_k e^{i\theta})|^{\nu_j} = \prod_{j=1}^{n-1} q_{kj}^{\nu_j} = \text{const} > 0$, а $p_k(\theta)$ — заданные по условию функции, непрерывные на $[0, 2\pi]$. Снова, применяя формулу Шварца [7], построим регулярную в K_n функцию $F(z)$ по значениям (7) ее вещественной части на ∂K_n:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} s_k r_k^{-q} \int_0^{2\pi} e^{-\lambda_k(\theta)} p_k(\theta) F_k(z, a_k + R_k e^{i\theta}) d\theta - \alpha_F + i\beta_F, \tag{8}$$

где $\alpha_F = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} s_k r_k^{-q} \int_0^{2\pi} e^{-\lambda_k(\theta)} p_k(\theta) \operatorname{Re} F_k(a_j + R_j e^{i\varphi}, a_k + R_k e^{i\theta}) d\theta = \text{const}$, $j = 1, \ldots, n$ (условия однозначности). Эта функция регулярна и однозначна в K_n и имеет одинаковые значения вещественной части на ∂K_n

с функцией $\xi(z)$, мероморфной в K_n, такой, которая может иметь в точке $z=\infty$ полюс не выше q-го порядка. Следовательно, к функции $F(z)$ надо добавить такую мероморфную $\Phi(z)$, которая обладала бы свойствами:

1) в точке $z=\infty$ может иметь полюс не выше q-го порядка $(q\geqslant 1)$;

2) $\operatorname{Re}\Phi(a_k+R_k e^{i\theta})=0, \quad k=1,\ldots,n$;

3) главная часть ряда Лорана в окрестности точки $z=\infty$ такая же, как и у функции $\xi(z)$.

Тогда

$$F(z)+\Phi(z)=f(z)\prod_{j=1}^{n-1}[\theta_j(z)]^{\nu_j}e^{i\pi(z)}H^{-q}(z). \tag{9}$$

Функция $\Phi(z)$ определяется неоднозначно с точностью до некоторого числа произвольных вещественных постоянных и, в частности, если воспользоваться функциями $w=\zeta_k(z)$, $k=1,\ldots,n$, имеет вид:

$$\Phi(z)=iA_0+\sum_{k=1}^{n}A_k\zeta_k(z)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{\mu=2}^{q}(i)^{\mu+1}A_\mu^{(k)}[\zeta_k(z)]^\mu, \tag{10}$$

где A_0, A_k, $A_\mu^{(k)}$ — произвольные вещественные постоянные. Если $q=1$, то последнее слагаемое в формуле (10) отсутствует.

Заметим теперь, что функция $\Phi(z)$ имеет $nq+1$ произвольную постоянную, подчиняющихся условиям связи между ними, которые определяются условием 3), наложенным на функцию $\Phi(z)$. Эти условия связи, как мы видим, таковы: главная часть лоранова разложения в окрестности точки $z=\infty$ у функции

$$f(z)=H^q(z)\,e^{-i\pi(z)}\prod_{j=1}^{n-1}[\theta_j(z)]^{-\nu_j}[F(z)+\Phi(z)]\equiv\Omega(z)$$

должна отсутствовать, т. е. если в окрестности точки $z=\infty$ имеем

$$\Omega(z)=\beta_q z^q+\beta_{q-1}z^{q-1}+\ldots+\beta_1 z+\beta_0+\frac{\beta_{-1}}{z}+\frac{\beta_{-2}}{z^2}+\ldots,$$

то $\beta_k=0$, $k=1,\ldots,q$. Это дает еще q условий.

Таким образом, произвольных постоянных будет всего $(n-1)\,q$ (A_0 относим к произвольной постоянной формулы Шварца).

З а м е ч а н и е 1. Остается пока открытым вопрос, будет ли функция (10) наиболее общего вида и, следовательно, будет ли наше решение являться в данном случае наиболее общим, хотя, как видно из его рассмотрения, с прикладной точки зрения оно имеет достаточно общий характер.

3. Пусть теперь $q\leqslant-1$. Дословно, повторяя предыдущие рассуждения, придем к такому решению поставленной задачи:

$$f(z)=e^{-i\pi(z)}\prod_{j=1}^{n-1}[\theta_j(z)]^{-\nu_j}F(z)\,H^q(z) \quad (q\leqslant-1). \tag{11}$$

Чтобы правая часть была регулярной функцией (левая часть регулярна по условию) в точке $z=\infty$, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана в окрестности точки у правой части отсутствовала, т. е. если

$$e^{-i\pi(z)}\prod_{j=1}^{n-1}[\theta_j(z)]^{-\nu_j}F(z)\,H^q(z)=\gamma_{-q}z^{-q}+\gamma_{-q-1}z^{-q-1}+\ldots$$
$$\ldots+\gamma_1 z+\gamma_0+\frac{\gamma_{-1}}{z}+\frac{\gamma_{-2}}{z^2}+\ldots,$$

то $\gamma_{-q}=\gamma_{-q-1}=\ldots=\gamma_1=0$. При выполнении этих условий задача имеет решение, при их невыполнении — не имеет. Всего независимых условий будет $|q| - 1$ (так как в формуле Шварца содержится произвольная постоянная). Поэтому, если $q = -1$, то решение существует и будет единственным.

Замечание 2. Полученные решения задачи Римана — Гильберта (9) и (10) в случае $q \geqslant 1$ и (11) в случае $q \leqslant -1$ допускают вычислительную обработку. Нам кажется, что представляет интерес получение в явном виде таких приближенных решений (с априорной погрешностью) для областей $n = 3$ и $n = 4$ в первую очередь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Е. Дундученко, О задаче Римана — Гильберта для многосвязной области, ДАН СССР, т. 196, № 1, 1971.
2. М. В. Келдыш и Л. И. Седов, Эффективные решения некоторых краевых задач для гармонических функций, ДАН СССР, т. 16, 1937.
3. Дун Гуан Чан, Задача Римана — Гильберта для многосвязных областей, Acta math. Sinica, vol. 8, № 2, 1928, 290—304.
4. Э. И. Зверович, Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровских классах на римановых поверхностях, УМН, т. 26, вып. 1, 1971.
5. Г. М. Голузин, Решение основных плоских задач математической физики для случая уравнения Лапласа и многосвязных областей, ограниченных окружностями, Матем. сб., т. 41, вып. 2, 1934.
6. С. В. Гончаренко, В. И. Поряденная, О приближенном построении функции, отображающей круговую трехсвязную область на круг с разрезами, УМЖ, т. 23, № 3, 1971.
7. В. А. Зморович, Про узагальнення інтегральної формули Шварца на n-зв'язні кругові області, ДАН УРСР, № 5, 1958.
8. Л. О. Дундученко, Ще про формулу Шварца для n-зв'язної кругової області, ДАН УРСР, № 11, 1966.
9. Л. Е. Дундученко, Об одном свойстве ядерных функций формулы Шварца для конечно-связной круговой области, УМЖ, т. 23, № 3, 1971.

Поступила 11.V 1972 г.
Киевский политехнический институт,