УДК 519.45

О прямых разложениях пар конечнопорожденных абелевых групп

З. П. Жилинская

Пусть G — конечнопорожденная абелева группа, H — подгруппа группы G. Пару (G, H) назовем разложимой в прямую сумму пар (G_1, H_1) и (G_2, H_2), если $G = G_1 \dot{+} G_2$, и при этом $H = H_1 + H_2$, где $H_1 \subseteq G_1$, $H_2 \subseteq G_2$. В этом случае запишем: $(G, H) = (G_1, H_1) \dot{+} (G_2, H_2)$.

Пары (G, H) и (G', H') назовем изоморфными, если существует изоморфизм $f : G \to G'$ такой, что $f(H) = H'$.

Будем считать, что группа G принадлежит классу $\mathfrak{A}$, замкнутому относительно операции прямой суммы. Запись $\mathfrak{A} = \{\infty, p_1^{i_1}, p_2^{i_2}, \ldots\}$ (p_t — простые) означает, что порядок каждого неразложимого циклического слагаемого в прямом разложении группы $G \in \mathfrak{A}$ совпадает с одним из чисел в фигурных скобках. Если G пробегает класс $\mathfrak{A}$, то все возможные пары (G, H) относительно прямой суммы образуют коммутативную полугруппу $B(\mathfrak{A})$.

Степенью пары (G, H) назовем число неразложимых циклических слагаемых в прямом разложении группы G.

Как показано в [1], для групп G класса $\mathfrak{A} = \{\infty, p_1^{i_1}, p_2^{i_2}, \ldots\}$ степени неразложимых пар (G, H) ограничены тогда и только тогда, когда все конечные инварианты класса $\mathfrak{A}$ не делятся на куб.

Если $\mathfrak{A} = \{\infty\}$ (класс свободных абелевых групп конечного ранга), то для пар (G, H), $G \in \mathfrak{A}$, очевидно не имеет места теорема Крулля — Шмидта. В связи с этим возникает задача: исследовать отклонения от теоремы Крулля — Шмидта для прямых разложений пар.

В данной заметке находятся условия изоморфизма пар (G, H), где G принадлежит классу $\mathfrak{A} = \{\infty, p^2, p\}$.

Обозначим через N периодическую часть группы G. Тогда пара (G, H) однозначно определяет пару $(G/N, H + N/N)$.

Определение 1. Инвариантные множители пары $(G/N, H + N/N)$ будем называть инвариантными множителями пары (G, H).

Лемма. *Если* $\mathfrak{A} = \{\infty, p^2, p\}$, *то любую пару* (G, H), $G \in \mathfrak{A}$, *можно разложить в прямую сумму следующих неразложимых пар, не изменяя инвариантные множители пары* (G, H):

1) $(G_1, H_1) = (\varepsilon, \eta, \delta)$, *где* $G_1 = (a_1) \dot{+} (a_2) \dot{+} (a_3)$, $H_1 = (b_1) \dot{+} (b_2)$, a_1, a_2, b_1, b_2 — *свободные образующие*, $p^2 a_3 = 0$, $b_1 = \varepsilon a_1 + a_3$, $b_2 = \eta a_2 + \delta p a_3$, ε, η — *целые числа*, ε/η, $\varepsilon \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$, $\alpha \geqslant 1$, $y \equiv 0 \pmod{p^\beta}$, $\beta - \alpha \geqslant 2$, $\delta \not\equiv 0 \pmod p$, δ — *вычет по* $\operatorname{mod} p$;

2) $(G_2, H_2) = \Delta_1 = \Delta_1'$, где $G_2 = (a_1) \dot{+} (a_2)$, $H = (b)$, a_1, b — *свободные образующие*, $p^2 a_2 = 0$ *для* Δ_1 *и* $p a_2 = 0$ *для* Δ_1', $b = \varepsilon a_1 + a_2$, $\varepsilon \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$, $\alpha \geqslant 1$;

3) $(G_3, H_3) = \Delta_2$, *где* $G_3 = (a_1) \dot{+} (a_2)$, $H_3 = (b)$, a_1, b — *свободные образующие*, $p^2 a_2 = 0$, $b = \varepsilon a_1 + p a_2$, $\varepsilon \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$, $\alpha \geqslant 2$;

4) $(G_4, H_4) = \Lambda$, *где* $G_4 = (a_1) \dot{+} (a_2)$, $H = (b_1) \dot{+} (b_2)$, a_1, b_1 — *свободные образующие*, $p^2 a_2 = 0$; $p b_2 = 0$, $b_1 = \varepsilon a_1 + a_2$, $\varepsilon \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$, $\alpha \geqslant 1$, $b_2 = \mu p a_2$;

5) $(G_5, H_5) = \Gamma$, *где* $G_5 = (a)$, $H_5 = (b)$, a *и* b — *элементы порядка* p *или* p^2, *или овободные образующие.*

Согласно [1] при $p = 4m + 1$ существует точно два класса изоморфных между собой пар $(\varepsilon, \eta, \delta)$, один класс состоит из пар $(\varepsilon, \eta, \delta)$, для которых $\left(\frac{\delta}{p}\right) = 1$, а второй — из пар $(\varepsilon, \eta, \delta)$, для которых $\left(\frac{\delta}{p}\right) = -1$ $\left(\left(\frac{\delta}{p}\right) — \text{символ Лежандра}\right)$. При $p = 2$ и $p = 4m + 3$ каждая неразложимая пара $(\varepsilon, \eta, \delta)$ изоморфна паре $(\varepsilon, \eta, 1)$.

Теорема 1. *При* $p = 4m + 1$ *имеют место следующие соотношения для пар:*

1) $(\varepsilon_1, \eta_1, \delta_1) \dot{+} (\varepsilon_2, \eta_2, \delta_2) = (\varepsilon_1, \eta_1, 1) \dot{+} (\varepsilon_2, \eta_2, 1)$, $\left(\frac{\delta_1}{p}\right) = \left(\frac{\delta_2}{p}\right) = -1$;

2) $(\varepsilon_1, \eta_1, \delta) \dot{+} (\varepsilon_2, \eta_2, 1) = (\varepsilon_1, \eta_1, 1) \dot{+} (\varepsilon_2, \eta_2, \delta)$, $\left(\frac{\delta}{p}\right) = -1$;

3) $(\varepsilon, \eta, \delta) \dot{+} \Delta_i = (\varepsilon, \eta, 1) \dot{+} \Delta_i$, $\left(\frac{\delta}{p}\right) = -1$, $i = 1, 2$;

3′) $(\varepsilon, \eta, \delta) \dot{+} \Delta_1^* = (\varepsilon, \eta, 1) \dot{+} \Delta_1'$, $\left(\frac{\delta}{p}\right) = -1$;

4) $(\varepsilon, \eta, \delta) \dot{+} \Lambda = (\varepsilon, \eta, 1) \dot{+} \Lambda$, $\left(\frac{\delta}{p}\right) = -1$;

5) $(\varepsilon, \eta, \delta) \dot{+} \Gamma = (\varepsilon, \eta, 1) \dot{+} \Gamma$, $\left(\frac{\delta}{p}\right) = -1$, *где* $\Gamma = (G, H)$, G *и* H — *бесконечные циклические группы.*

Доказательство этих тождеств основано на подходящем выборе автоморфизмов группы и подгруппы, переводящих левую часть в правую.

Определение 2. Пусть $G \in \mathfrak{A} = \{\infty, p^2, p\}$. Разложение $(G, H) = A_1 \dot{+} \ldots \dot{+} A_q$ в прямую сумму неразложимых пар назовем специальным, если инвариантные множители каждой пары A_i встречаются среди инвариантных множителей пары (G, H).

С помощью тождеств 1) —5) можно указать полную систему инвариантов, характеризующих любую пару (G, H) класса $\mathfrak{A} = \{\infty, p^2, p\}$ с точностью до изоморфизма.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{A} = \{\infty, p^2, p\}$. Если $p \neq 4m + 1$, то любые два специальных разложения пары (G, H), $G \in \mathfrak{A}$, в прямую сумму неразложимых пар изоморфны. Если $p = 4m + 1$ и $G, G' \in \mathfrak{A}$, то пары (G, H) и (G', H') изоморфны тогда и только тогда, когда для их специальных разложений $(G, H) = A_1 \dot{+} \ldots \dot{+} A_q$ и $(G', H') = A'_1 \dot{+} \ldots \dot{+} A'_s$ одновременно выполняются следующие условия: 1) $q = s$ и после соответствующей перенумерации пары A_i и A'_i или изоморфны или отличаются друг от друга только значением арифметического инварианта $\left(\frac{\delta}{p}\right)$ (последнее, очевидно, возможно только в том случае, когда степени пар A_i и A'_i равны 3); 2) если среди пар A_i (A'_i) встречаются только пары степени 3 и пары $(F, 0)$, F — примарная циклическая группа, то произведение всех символов Лежандра, соответствующих парам A_i степени 3, совпадает с таким же произведением для пар A'_i.*

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Д. Берман, З. П. Жилинская, О совместных прямых разложениях конечно порожденной абелевой группы и ее подгруппы, ДАН СССР, т. 210, № 5, 1973.

Поступила 31.X 1972 г.,
после переработки — 27.VI 1973 г.
Ужгородский государственный университет