УДК 518.517.948

Об оценке погрешности при решении уравнений первого рода

Л. Б. Маланюк

Рассмотрим уравнение

$$Ax = y, \tag{1}$$

где x — искомый, y — заданный элементы гильбертова пространства H; A — линейный вполне непрерывный оператор, имеющий неограниченный обратный. Считаем, что при $y = \bar{y}$ уравнение (1) однозначно разрешимо и $\bar{x} = A^{-1}\bar{y}$.

1. Пусть задано y_δ, удовлетворяющее условию $\| \bar{y} - y_\delta \| \leqslant \delta$. Вследствие неустойчивости задачи (1) уравнение

$$Ax_\delta = y_\delta, \tag{2}$$

вообще говоря, может не иметь решения, или если даже и существует решение данного уравнения, то

$$\| \bar{x} - x_\delta \| \tag{3}$$

может быть как угодно большой.

Согласно лемме [1] взаимно однозначное и непрерывное отображение компактного метрического пространства M в метрическое пространство N есть гомеоморфизм. В применении к уравнению (1) это означает, что устойчивость может быть восстановлена, если будем предполагать, что решение $\bar{x}$ принадлежит данному компакту M. Таким образом, если решение уравнения (2) $x_\delta \in M$, то обратный оператор A^{-1} есть непрерывный оператор на $N \in AM$, т. е. имеем непрерывную зависимость $x_\delta = A^{-1}y_\delta$ от y_δ при условии, что $y_\delta \in N = AM$.

Для оценки (3) используем модуль непрерывности обратного оператора A^{-1} на $N = AM$

$$\omega(\delta, M) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \in M \\ \|Ax_1 - Ax_2\| \leqslant \delta}} \| x_1 - x_2 \|. \tag{4}$$

Если положить $x_1 = \bar{x}$, $x_2 = x_\delta$ и $\bar{x}, x_\delta \in M$, а $A\bar{x}$, $Ax_\delta \in N$, то $\| \bar{x} - x_\delta \| \leqslant \omega(\delta, M)$.

Один из широко применяемых способов задания компакта M состоит в следующем [2, 3]. Вводится вполне непрерывный оператор $B : H \to H$ и за компакт $M_{\bar{R}}$ ($\bar{R} > 0$) принимается образ шара $S_{\bar{R}} = \{z : \| z \| \leqslant \bar{R}\}$ при преобразовании $B : M_{\bar{R}} = BS_{\bar{R}}$. Число $\bar{R}$ называют радиусом компакта $M_{\bar{R}}$.

Если $z_1, z_2 \in S_{\overline{R}}$, то формулу (4) перепишем в виде

$$\omega(\delta, R) = \sup_{\substack{\|z_1 - z_2\| \leqslant R, \\ \|ABz_1 - ABz_2\| \leqslant \delta}} \|Bz_1 - Bz_2\|,$$

где $R = 2\overline{R}$.

Обозначим $C = AB$, $z_1 - z_2 = u$. Учитывая линейность операторов B и C, имеем

$$\omega^2(\delta, R) = \sup_{\substack{\|u\|^2 \leqslant R^2, \\ \|ABu\|^2 \leqslant \delta^2}} \|Bu\|^2 = \sup_{\substack{\|u\|^2 \leqslant R^2, \\ (u, (AB)^* ABu) \leqslant \delta^2}} (u, B^*B).$$

В данной заметке ищем оценку для $\omega(\delta, R)$ в случае, когда операторы $B_1 = B^*B$ и $C_1 = (AB)^* AB$ связаны зависимостью $g(B_1) = C_1$, где $g(\lambda)$ (при $\lambda > 0$) — выпуклая вверх (вогнутая) непрерывная возрастающая функция и $g(0) = 0$ [4]. Тогда

$$\omega^2(\delta, R) = \sup_{\substack{\sum_{i=1}^{\infty} (u, \psi_i)^2 \leqslant R^2, \\ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (u, \psi_i)^2 \leqslant \delta^2}} \sum_{i=1}^{\infty} g(\lambda_i)(u, \psi_i)^2$$

или

$$\frac{\omega^2(\delta, R)}{R^2} = \sup_{\substack{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \leqslant 1, \\ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i \leqslant \frac{\delta^2}{R^2}}} \sum_{i=1}^{\infty} g(\lambda_i)\alpha_i,$$

где ψ_i — собственные функции оператора C_1, а $\alpha_i = \dfrac{(u, \psi_i)^2}{R^2}$. Используя свойства функции $g(\lambda)$, имеем

$$\frac{\omega^2(\delta, R)}{R^2} = \sup_{\substack{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i + \alpha_0 = 1, \\ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i + 0\alpha_0 \leqslant \frac{\delta^2}{R^2}}} \sum_{i=1}^{\infty} g(\lambda_i)\alpha_i + 0\alpha_0 =$$

$$= \sup_{\substack{\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = 1, \\ \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \alpha_i \leqslant \frac{\delta^2}{R^2}}} \sum_{i=0}^{\infty} g(\lambda_i)\alpha_i \leqslant \sup_{\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \alpha_i \leqslant \frac{\delta^2}{R^2}} g\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i a_i\right) \leqslant g\left(\frac{\delta^2}{R^2}\right)$$

или

$$\omega(\delta, R) \leqslant \left[g\left(\frac{\delta^2}{R^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} R.$$

2. Пусть задан оператор A_ε, для которого $\|A - A_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon$. Для уравнения

$$A_\varepsilon x_\varepsilon = y \tag{5}$$

имеем ту же ситуацию, что и в п. 1. В дальнейшем будем рассматривать линейные операторы A_ε, для которых существует единственное решение уравнения (5), удовлетворяющее условиям: $x_\varepsilon \in M_R$, $\| x_\varepsilon \| \leqslant d$. Из (1) и (5) следует

$$A\bar{x} - Ax_\varepsilon = A_\varepsilon x_\varepsilon - Ax_\varepsilon + A\bar{x} - A_\varepsilon x_\varepsilon = (A_\varepsilon - A)\, x_\varepsilon$$

и

$$\| A\bar{x} - Ax_\varepsilon \| \leqslant \varepsilon d.$$

Для оценки отклонения $\| \bar{x} - x_\varepsilon \|$ воспользуемся модулем непрерывности обратного оператора A^{-1} на компакте M_R:

$$\omega(\varepsilon, R) = \sup_{\substack{\bar{x}, x_\varepsilon \in M_R; \\ \| A\bar{x} - Ax_\varepsilon \| \leqslant \varepsilon d}} \| \bar{x} - x_\varepsilon \| \leqslant \left\{ g \left[\frac{(\varepsilon d)^2}{R^2} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} R.$$

3. Рассмотрим уравнение

$$A_\varepsilon x_{\varepsilon\delta} = y_\delta, \tag{6}$$

где

$$\| A - A_\varepsilon \| \leqslant \varepsilon, \ \| y - y_\delta \| \leqslant \delta \tag{7}$$

и существует единственное решение данного уравнения $x_{\varepsilon\delta}$, причем

$$\| x_{\varepsilon\delta} \| \leqslant d, \ x_{\varepsilon\delta} \in M, \ y_\delta \in N = AM. \tag{8}$$

Используя равенства (1) и (6), имеем

$$Ax_{\varepsilon\delta} - A\bar{x} = (A - A_\varepsilon)\, x_{\varepsilon\delta} + y_\delta - \bar{y}.$$

Таким образом,

$$\| Ax_{\varepsilon\delta} - A\bar{x} \| \leqslant \varepsilon d + \delta.$$

Применяя методику п. 1, получаем

$$\omega(\varepsilon, \delta, R) \leqslant \left\{ g \left[\frac{(\varepsilon d + \delta)^2}{R^2} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} R. \tag{9}$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть A, B — линейные вполне непрерывные операторы, причем оператор A задан на компакте $M_R = BS_R$, где $S_R = \{z : \|z\| \leqslant R\}$. Предположим, что существует вогнутая непрерывная возрастающая функция $g(\lambda)$, $g(0) = 0$ и $g(B^*B) = (AB)^* AB$. Тогда, если существуют решения уравнений* (1) *и* (6), *удовлетворяющие условиям* (8) *и* (7), *а A_ε — линейный оператор, то имеет место оценка погрешности* (9).

В частном случае, когда $\varepsilon = 0$ и $g(\lambda) = \lambda^{\frac{1}{2}}$, имеем оценку, доказанную в работе [3]:

$$\omega(\delta, R) = \delta^{\frac{1}{2}} R^{\frac{1}{2}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Тихонов, Об устойчивости обратных задач, ДАН СССР, т. 39, № 5, 1944.
2. М. М. Лаврентьев, О некоторых некорректных задачах математической физики, Изд. СО АН СССР, Новосибирск, 1962.
3. В. К. Иванов, Т. И. Королюк, Об оценке погрешности при решении линейных некорректно поставленных задач, Ж. вычисл. математики и матем. физики, т. 9, № 1, 1969.
4. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1, «Наука», М., 1970.

Поступила 20.VII 1972 г.
Институт кибернетики АН УССР

уравнения (5), удовлетворяющее условиям: $x_\varepsilon \in M_R$, $\| x_\varepsilon \| \leqslant d$. Из (1) и (5) следует

$$A\bar{x} - Ax_\varepsilon = A_\varepsilon x_\varepsilon - Ax_\varepsilon + A\bar{x} - A_\varepsilon x_\varepsilon = (A_\varepsilon - A)\, x_\varepsilon$$

и

$$\| A\bar{x} - Ax_\varepsilon \| \leqslant \varepsilon d.$$

Для оценки отклонения $\| \bar{x} - x_\varepsilon \|$ воспользуемся модулем непрерывности обратного оператора A^{-1} на компакте M_R:

$$\omega(\varepsilon, R) = \sup_{\substack{\bar{x}, x_\varepsilon \in M_R; \\ \|A\bar{x} - Ax_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon d}} \| \bar{x} - x_\varepsilon \| \leqslant \left\{ g\left[\frac{(\varepsilon d)^2}{R^2} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} R.$$

3. Рассмотрим уравнение

$$A_\varepsilon x_{\varepsilon\delta} = y_\delta, \tag{6}$$

где

$$\| A - A_\varepsilon \| \leqslant \varepsilon, \ \| y - y_\delta \| \leqslant \delta \tag{7}$$

и существует единственное решение данного уравнения $x_{\varepsilon\delta}$, причем

$$\| x_{\varepsilon\delta} \| \leqslant d, \ x_{\varepsilon\delta} \in M, \ y_\delta \in N = AM. \tag{8}$$

Используя равенства (1) и (6), имеем

$$Ax_{\varepsilon\delta} - A\bar{x} = (A - A_\varepsilon)\, x_{\varepsilon\delta} + y_\delta - \bar{y}.$$

Таким образом,

$$\| Ax_{\varepsilon\delta} - A\bar{x} \| \leqslant \varepsilon d + \delta.$$

Применяя методику п. 1, получаем

$$\omega(\varepsilon, \delta, R) \leqslant \left\{ g\left[\frac{(\varepsilon d + \delta)^2}{R^2} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} R. \tag{9}$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть A, B — линейные вполне непрерывные операторы, причем оператор A задан на компакте $M_R = BS_R$, где $S_R = \{z : \|z\| \leqslant R\}$. Предположим, что существует вогнутая непрерывная возрастающая функция $g(\lambda)$, $g(0) = 0$ и $g(B^*B) = (AB)^* AB$. Тогда, если существуют решения уравнений* (1) *и* (6), *удовлетворяющие условиям* (8) *и* (7), *а A_ε — линейный оператор, то имеет место оценка погрешности* (9).

В частном случае, когда $\varepsilon = 0$ и $g(\lambda) = \lambda^{\frac{1}{2}}$, имеем оценку, доказанную в работе [3]:

$$\omega(\delta, R) = \delta^{\frac{1}{2}} R^{\frac{1}{2}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Тихонов, Об устойчивости обратных задач, ДАН СССР, т. 39, № 5, 1944.
2. М. М. Лаврентьев, О некоторых некорректных задачах математической физики, Изд. СО АН СССР, Новосибирск, 1962.
3. В. К. Иванов, Т. И. Королюк, Об оценке погрешности при решении линейных некорректно поставленных задач, Ж. вычисл. математики и матем. физики, т. 9, № 1, 1969.
4. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1, «Наука», М., 1970.

Поступила 20.VII 1972 г.

Институт кибернетики АН УССР