УДК 519.44

О структурных константах алгебр характеров p-групп

С. С. Поляк

Пусть $X_1, \ldots, X_k$ — характеры неприводимых комплексных представлений конечной группы G, и

$$X\ \ (g)\, X_j(g) = \sum_{s=1}^{k} \lambda_{ij}^{(s)} X_s(g). \tag{1}$$

Макки [1] показал, что если группа G содержит абелев нормальный делитель индекса 2, то структурные константы $\lambda_{ij}^{(s)}$ алгебры характеров принимают значения либо 0, либо 1. В дальнейшем будем говорить, что группа G обладает F-свойством (свободна от кратностей), если числа $\lambda_{ij}^{(s)}$ равны 0 или 1.

Каковы группы, обладающие F-свойством?

Тот факт, что не только группы, удовлетворяющие условию теоремы Макки, обладают F-свойством, обнаруживается на следующих примерах.

1. Рассмотрим группу G_4 (2) верхних треугольных матриц порядка 4, содержащих в клетках ниже главной диагонали нули, на главной диагонали — единицы, а в клетках над главной диагональю — элементы конечного простого поля GF (2). Согласно [2] полная система минимальных попарно ортогональных идемпотентов групповой алгебры $KG_4(2)$ (K — поле комплексных чисел) группы G_4 (2) имеет вид:

$$\frac{1}{2^6}(1 \pm g_{12})(1+g_{13})(1+g_{14})(1 \pm g_{23})(1+g_{24})(1 \pm g_{34}), \quad \frac{2}{2^6}(1 \pm g_{12})(1+g_{13})(1+g_{14})(1+g_{23})(1-g_{24})$$

$$\frac{2}{2^6}(1+g_{12})(1-g_{13})(1+g_{14})(1 \pm g_{24})(1 \pm g_{34}), \quad \frac{4}{2^6}(1 \pm g_{12})(1+g_{13})(1+g_{14})(1+g_{23})(1-g_{24})$$

g_{ij}— матрица 4-го порядка с единицами по главной диагонали и в клетке (i, j) и с нулями в остальных клетках.

Минимальный идемпотент центра групповой алгебры KG_4 (2), соответствующий минимальному идемпотенту e групповой алгебры $KG_4(2)$, записывается в виде

$$\sum_{i=1}^{r} g_i^{-1} e g_i, \tag{2}$$

где $g_1, \ldots, g_r$ — представители смежных классов группы G_4 (2) по нормализатору минимального идемпотента e в группе G_4 (2) [3]. Используя это, находим все минимальные идемпотенты центра алгебры KG_4 (2)

$$\frac{1}{2^6}(1 \pm g_{12})(1+g_{13})(1+g_{14})(1 \pm g_{23})(1+g_{24})(1 \pm g_{34}), \quad \frac{2}{2^6}\cdot 2(1 \pm g_{12})(1+g_{13})(1+g_{14})(1-g_{24})$$

$$\frac{2}{2^6}\cdot 2(1-g_{13})(1+g_{14})(1+g_{24})(1 \pm g_{34}), \quad \frac{2}{2^6}(1 \pm g_{12}g_{34})(1-g_{13})(1+g_{14})(1-g_{24})$$

$$\frac{4}{2^6}[4 \pm 2(g_{23}+g_{13}g_{23}+g_{23}g_{24}-g_{12}g_{23}g_{24})](1-g_{14}).$$

Имеем 16 минимальных идемпотентов центра.

Пусть 1, 2, . . . , 16 — соответствующие характеры, из которых 9, 10, . . . , 16 — характеры, соответствующие двумерным представлениям. Таблица умножения этих характеров имеет вид

	9	10	11	12	13	14	15	16
9	1+2+3+4	5+6+7+8	13+14	13+14	11+12	11+12	15+16	15+16
10		1+2+3+4	13+14	13+14	11+12	11+12	15+16	15+16
11			1+3+5+7	2+4+6+8	9+10	9+10	15+16	15+16
12				1+3+5+7	9+10	9+10	15+16	15+16
13					1+3+6+8	2+4+5+7	15+16	15+16
14						1+3+6+8	15+16	15+16
15							1+2+5+6+9+10+11+12+13+14	1+2+5+6+9+10+11+12+13+14
16								1+2+5+6+9+10+11+12+13+14

Итак, группа G_4 (2) обладает F-свойством, хотя она и не удовлетворяет условию теоремы Макки.

Но уже группа G_5 (2), а следовательно, все группы G_n (2), где $n > 4$, не обладает F-свойством. Нетрудно убедиться, что

$$e_1 = \frac{8}{2^{10}}[8 + 4(g_{12}g_{45} + g_{12}g_{13}g_{45} + g_{12}g_{35}g_{45} - g_{12}g_{35}g_{45}g_{13})](1 - g_{14}) \times$$

$$\times (1 + g_{15})(1 - g_{25}),$$

$$e_2 = \frac{2}{2^{10}} \cdot 2(1 + g_{12})(1 + g_{13})(1 + g_{14})(1 + g_{15})$$

$$(1 - g_{24})(1 + g_{25})$$

$$(1 + g_{35})$$

$$(1 + g_{45})$$

— минимальные идемпотенты центра групповой алгебры KG_5 (2). Пусть χ_1 и χ_2 — соответствующие им характеры. Можно показать, что χ_2 входит в разложение χ_1^2 с кратностью 2, т. е.

$$\chi_1^2 = \ldots + 2\chi_2 + \ldots$$

2. Рассмотрим еще один класс групп H_n (2) — сплетение циклических групп 2-го порядка [4]. Нетрудно видеть, что группа H_2 (2) удовлетворяет

условию теоремы Макки и поэтому обладает F-свойством. Покажем, что группа $H_3(2)$, хотя она и не удовлетворяет условию теоремы Макки, все же обладает F-свойством.

Пусть H — прямое произведение двух экземпляров группы $H_2(2): H = H^{(1)} \times H^{(2)}$. Группа $G = H_3(2)$ есть полупрямое произведение группы H на циклическую группу второго порядка. Она имеет четыре одномерных характера X_1, X_2, X_3, X_4 и один двумерный X_5. Характеры группы H имеют вид: $X_{ij}(ab) = X_i(a) \cdot X_j(b)$ $(a \in H^{(1)}, b \in H^{(2)})$.

Каждый характер X_{ii} точно двумя способами продолжается до одномерных характеров $X_{ii}^{(1)}$ и $X_{ii}^{(2)}$ группы G, а при $i \neq j$ функции $\widetilde{X}_{ij}(ab)$, равные $X_i(a) \cdot X_j(b) + X_j(a) \cdot X_j(b)$ на H и нулю вне H, дают остальные характеры группы G.

F-свойство для произведений, в которых участвуют одномерные характеры, очевидно, поэтому остается его проверить для характеров $\widetilde{X}_{ij}$.

$$\widetilde{X}_{ij}^2 = X_{11}^{(1)} + X_{11}^{(2)} + X_{tt}^{(1)} + X_{tt}^{(2)} \quad (j \neq 5, X_i X_j = X_t),$$

$$\widetilde{X}_{i5}^2 = X_{11}^{(1)} + X_{11}^{(2)} + X_{55}^{(1)} + X_{55}^{(2)} + X_{12} + X_{13} + X_{14},$$

$$\widetilde{X}_{i_1 j_1} \widetilde{X}_{i_2 j_2} = \begin{cases} X_{tt}^{(1)} + X_{tt}^{(2)} + X_{rr}^{(1)} + X_{rr}^{(2)}, & \text{если } t = t_1, r = r_1, \\ X_{tt}^{(1)} + X_{tt}^{(2)} + X_{rr_1}, & \text{если } t = t_1, r \neq r_1, \\ X_{tt_1} + X_{rr}^{(1)} + X_{rr}^{(2)}, & \text{если } t \neq t_1, r = r_1, \\ X_{tt_1} + X_{rr_1}, & \text{если } t \neq t_1, r \neq r_1. \end{cases}$$

Таким образом, группа $H_3(2)$ обладает F-свойством. Однако можно показать, что уже группа $H_4(2)$ не обладает F-свойством.

Пусть H — нормальный делитель группы G индекса 2, $G = \{H, b\}$, $b^2 = h \in H$; X_i $(i \leqslant r)$ — характеры H, остающиеся на месте под действием автоморфизма, порожденного элементом b, и продолжающиеся до двух различных характеров X_{i1} и X_{i2} группы G; $X_j^{(1)}, X_j^{(2)}$ — пары характеров H, переходящих под действием автоморизма, порожденного элементом b, друг в друга. Тогда $X_j^{(1)} + X_j^{(2)}$ $(j > r)$ — характеры группы G (последние вне H принимают значение 0).

Лемма 1. *Пусть H обладает F-свойством. Для того чтобы группа G обладала F-свойством, необходимо и достаточно выполнения условий:*

$$(X_\nu^{(k)} X_\mu^{(s)}, X_\nu^{(k_1)} X_\mu^{(s_1)}) = 0$$

для всевозможных пар (ν, μ), где в произведениях $X_\nu^{(k)} \cdot X_\mu^{(s)}$ и $X_\nu^{(k_1)} \cdot X_\mu^{(s_1)}$ заменен только один верхний индекс.

Действительно, $X_{tt} \cdot X_{ks}$ и $X_j^{(m)} \cdot X_{ks}$ всегда обладают F-свойством. Что касается произведений $X_\mu^{(k)} \cdot X_\mu^{(s)}$ и $X_\nu^{(k_1)} \cdot X_\mu^{(s_1)}$, где изменен только один верхний индекс, то они в своем разложении не должны содержать одни и те же характеры (ибо при индуцировании их на H произошло бы слипание характеров, что противоречит F-свойству на H). Но отсюда следует, что скалярное произведение $X_\nu^{(k)} \cdot X_\mu^{(s)}$ на $X_\nu^{(k_1)} \cdot X_\mu^{(s_1)}$ при наших предположениях должно равняться нулю; это и требовалось доказать.

Из этой леммы как следствие получается теорема Макки. Действительно, так как H — абелева группа, то $X_\nu^{(k)} \cdot X_\mu^{(s)}$ и $X_\nu^{(k_1)} \cdot X_\mu^{(s_1)}$ являются характерами и, если, например, $k \neq k_1$, то $X_\nu^{(k)} \cdot X_\mu^{(s)} \neq X_\nu^{(k_1)} \cdot X_\mu^{(s)}$. Таким образом, их скалярное произведение равно нулю, что означает выполнение F-свойства на G.

С помощью леммы непосредственным подсчетом можно убедиться в том, что группы $G_4(2)$ и $H_3(2)$ обладают F-свойством. Заметим, что группы $G_4(2)$ и $H_3(2)$ — нильпотентные 2-группы класса 2.

Существует 2-группа любого класса нильпотентности, обладающая F-свойством. Действительно, рассмотрим группу $G=\{a, b\}$ с определяющими соотношениями $a^{2^n}=1$, $b^2=1$, $b^{-1}ab=a^{-1}$.

Группа G имеет класс n. Она обладает абелевым нормальным делителем (a) индекса 2 и поэтому удовлетворяет условию теоремы Макки.

Исследуем теперь F-свойство для p-группы при $p\neq 2$.

Из результатов [5] вытекает лемма.

Лемма 2. *Если G-нильпотентная группа класса 2, то каждый минимальный идемпотент центра имеет вид*

$$e=\frac{1}{(Q:1)}\sum_{g\in Q}\mathrm{X}(g^{-1})\,g, \tag{3}$$

где X — линейный характер Q, Q — нормальный делитель группы G, содержащий ее центр Z.

Теорема 1. *Если G — p-группа класса 2, то в алгебре ее характеров константы $\lambda_{ij}^{(s)}$ есть нули или степени p, а при $p\neq 2$ среди этих констант по крайней мере одна равна p^{ω}, где $\omega>0$.*

Доказательство. Рассмотрим три характера группы $G:\mathrm{X},\varphi,\Psi$. Запишем соответствующие минимальные идемпотенты e_Q, e_Φ, e_T центра. Ввиду леммы 2

$$e_Q=\frac{1}{(Q:1)}\sum_{g\in Q}\mathrm{X}(g^{-1})\,g,\quad e_\Phi=\frac{1}{(\Phi:1)}\sum_{g\in \Phi}\varphi(g^{-1})\,g,\quad e_T=\frac{1}{(T:1)}\sum_{g\in T}\Psi(g^{-1})g.$$

Тогда

$$\widetilde{\mathrm{X}}=\sqrt{(G:Q)}\,\mathrm{X},\quad \widetilde{\varphi}=\sqrt{(G:\Phi)}\,\varphi,\quad \widetilde{\Psi}=\sqrt{(G:T)}\,\Psi,$$

где X,φ и Ψ — линейные характеры соответственно Q,Φ и T. Эти равенства нужно понимать так, что характеры X,φ,Ψ совпадают соответственно с $\sqrt{(G:Q)}\,\mathrm{X}$, $\sqrt{(G:\Phi)}\,\varphi$, $\sqrt{(G:T)}\Psi$ на Q,Φ,T и равны нулю вне их. Подсчитаем кратность Λ вхождения характера $\widetilde{\Psi}$ в произведение $\widetilde{\mathrm{X}}\cdot\widetilde{\varphi}$

$$\Lambda=\frac{1}{(G:1)}\sum_{g\in Q\cap\Phi\cap T}[\widetilde{\mathrm{X}}\cdot\widetilde{\varphi}](g)\cdot\widetilde{\Psi}(g^{-1})=\frac{1}{(G:1)}\times$$

$$\times\sqrt{(G:Q)}\,\sqrt{(G:\Phi)}\,\sqrt{(G:T)}\sum_{g\in Q\cap\Phi\cap T}\mathrm{X}(g)\cdot\varphi(g)\cdot\Psi(g^{-1}).$$

Так как

$$\sum_{g\in Q\cap\Phi\cap T}\mathrm{X}(g)\,\varphi(g)\cdot\Psi(g^{-1})=\begin{cases}0,\\ (Q\cap\Phi\cap T:1)=p^t,\end{cases}$$

то $\Lambda=\dfrac{1}{(G:1)}\sqrt{(G:Q)}\,\sqrt{(G:\Phi)}\,\sqrt{(G:T)}\,p^t$ или $\Lambda=0$. Каждый из корней $\sqrt{(G:Q)}$, $\sqrt{(G:\Phi)}$ и $\sqrt{(G:T)}$ есть степень p. Ввиду того, что Λ должно быть целым числом, показатель степени p в числителе не меньше показателя степени p в знаменателе и, таким образом, $\Lambda=\begin{cases}0,\\ p^{\omega}\end{cases}$, где $\omega\geqslant 0$.

Докажем вторую часть теоремы 1. Пусть e — минимальный идемпотент центра вида (3). Обозначим через H его ядро. Тогда представление Γ, соответствующее идемпотенту e, можно рассматривать как представление фактор-группы G/H. Поэтому можно считать, что рассматриваемое представление — точное (ядро совпадает с единицей) и, таким образом, Q совпадает с центром Z группы G (после перехода к фактор-группе по ядру H) и $Q = Z$ — циклическая группа порядка p^k.

Итак, минимальный идемпотент центра в нашем случае имеет вид

$$e = \frac{1}{(G:1)} \sqrt{(G:Z)} \sqrt{(G:Z)} \left(\sum_{g \in Z} X(g^{-1}) g \right).$$

Характер $\widetilde{X}$ — характер группы G, соответствующий минимальному идемпотенту e центра, вне Z обращается в нуль, а его значениями на Z есть числа $\sqrt{(G:Z)}\, X(g) = \sqrt{(G:Z)}\, \xi$, где ξ — корень из единицы степени p^k. Если $p \neq 2$, то $X^2 = \xi^2$ и X^2 — точный характер центра Z группы G. Характеру X^2 соответствует минимальный идемпотент центра:

$$\widetilde{e} = \frac{1}{(Z:1)} \sum X^2(g^{-1})\, g,$$

которому соответствует характер $\widetilde{\Psi}$, равный $\sqrt{(G:Z)}\, X^2$ на Z и принимающий значение нуль вне Z. Теперь подсчитаем кратность Λ вхождения $\widetilde{\Psi}$ в X^2:

$$\Lambda = \frac{1}{(G:1)} \sum_{g \in G} \widetilde{X}^2(g)\, \widetilde{\Psi}(g^{-1}) = \frac{1}{(G:1)} \sum_{g \in Z} \widetilde{X}^2(g) \cdot \widetilde{\Psi}(g^{-1}).$$

Так как $\widetilde{X}^2 = (\sqrt{(G:Z)})^2 X^2$ и $\widetilde{\Psi} = \sqrt{(G:Z)}\, \Psi$, то

$$\Lambda = \frac{1}{(G:1)} (\sqrt{(G:Z)})^2 \sqrt{(G:Z)}, \sum_{g \in Z} X^2(g)\, \Psi(g^{-1}).$$

Ввиду того, что

$$\sum_{g \in Z} X^2(g)\, \Psi(g^{-1}) = \begin{cases} 0, \\ (Z:1) = p^k \end{cases}$$

имеем

$$\Lambda = \frac{1}{(G:1)} \sqrt{(G:Z)}\, (G:Z)\, (Z:1) = \frac{1}{(G:1)} \sqrt{(G:Z)}\, (G:1) = p^{\omega},$$

где $\omega > 0$, так как Z не совпадает со всей группой G. Доказательство завершено.

Т е о р е м а 2. *Для любой неабелевой p-группы $(p \neq 2)$ не имеет место F-свойство.*

Действительно, всякая неабелева p-группа обладает фактор-группой класса 2, причем характеры фактор-группы являются в то же время характерами всей группы.

Покажем теперь, что для p-группы класса $m > 2$ теорема 1 уже не имеет места.

Рассмотрим группу $G_4(3)$ треугольных матриц порядка 4 над полем из трех элементов (3-группа класса 3).

Пусть ε — первообразный корень из единицы степени 3. Легко убедиться, что

$$e = \frac{3^2}{3^6} \cdot 3 \{3 + \varepsilon g_{23} + \varepsilon g_{13} g_{23} + \varepsilon g_{13}^2 g_{23} + \varepsilon^2 g_{23}^2 + \varepsilon^2 g_{13} g_{23}^2 +$$

$$+ \varepsilon^2 g_{13}^2 g_{23}^2 + \varepsilon g_{23} g_{24} + g_{13} g_{23} g_{24} + \varepsilon^2 g_{13}^2 g_{23} g_{24} + \varepsilon^2 g_{23}^2 g_{24}^2 + \varepsilon g_{13} g_{23}^2 g_{24}^2 +$$

$$+ g_{13}^2 g_{23}^2 g_{24}^2 + \varepsilon g_{23} g_{24}^2 + \varepsilon^2 g_{13} g_{23} g_{24}^2 + g_{13}^2 g_{23} g_{24}^2 + \varepsilon^2 g_{23}^2 g_{24} +$$

$$+ g_{13} g_{23}^2 g_{24} + \varepsilon g_{13}^2 g_{23}^2 g_{24}\} (1 + \varepsilon g_{14} + \varepsilon^2 g_{14}^2)$$

— минимальный идемпотент центра для группы G_4 (3). Пусть X — характер неприводимого комплексного представления группы G_4 (3), соответствующий e. Найдем кратность λ вхождения характера X в X^2:

$$\Lambda = \frac{1}{(G_4(3):1)} \sum_{g \in G_4(3)} X^2(g) X(g^{-1}) = \frac{3^6 \cdot 5}{3^6} = 5 \equiv 2 \pmod 3.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. G. W. Mackey, On multiplicity-free representation of finite groups, Pacific J. Math., 8, 1958.
2. С. С. Поляк, Незвідні комплексні зображення групи трикутних матриць над скінченним простим полем, ДАН УРСР, № 1, 1966.
3. С. Д. Берман, Модулярні представлення скінченних груп, головний ряд яких має циклічні фактори, ДАН УРСР, № 5, 1960.
4. C. W. Curtis and I. Reiner, Representation theory of finite groups and associative algebras, New York, 1963.
5. С. Д. Берман, О наименьшем поле, в котором реализуются все комплексные представления p-группы нечетного порядка, УМН, т. 16, вып. 3, 1961.

Поступила 25.IX 1972 г.
Ужгородский государственный университет