УДК 517.917

Построение приближенных решений двух линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

П. М. Сеник, С. Г. Сеник

Предлагается метод построения решений двух дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами с использованием метода среднеквадратичных приближений. Рассматривается случай периодических решений.

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} + \alpha_1(\nu t)\,x + \alpha_2(\nu t)\,y = 0, \\ &\frac{dy}{dt} + \beta_1(\nu t)\,x + \beta_2(\nu t)\,y = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\alpha_1(\nu t), \alpha_2(\nu t), \beta_1(\nu t)$ и $\beta_2(\nu t)$ — конечные тригонометрические суммы периода $T = \frac{2\pi}{\nu}$, не содержащие постоянных слагаемых.

В системе (1) сделаем замену переменных, положив

$$x = \varphi_1\xi + \lambda\varphi_2\eta, \quad y = \mu\varphi_1\xi + \varphi_2\eta; \tag{2}$$

здесь φ_1, φ_2, λ и μ — постоянные параметры, два последних из них удовлетворяют условию

$$\lambda\mu \neq 1. \tag{3}$$

Получаем

$$(1 - \lambda\mu)\,\varphi_1\left(\frac{d\xi}{dt} + p\eta\right) = [(-\alpha_1 - \mu\alpha_2 + \lambda\beta_1 + \lambda\mu\beta_2)\,\xi +$$
$$+ (1 - \lambda\mu)\,p\eta]\,\varphi_1 + [-\lambda(\alpha_1 - \beta_2) - \alpha_2 + \lambda^2\beta_1]\,\eta\varphi_2,$$

$$(1-\lambda\mu)\varphi_2\left(\frac{d\eta}{dt}-p\xi\right)=[\lambda(\alpha_2-\beta_1)-\beta_2+\mu^2\alpha_2]\,\xi\varphi_1+$$
$$+[-(1-\lambda\mu)p\xi+(-\beta_2+\mu\alpha_2-\lambda\beta_1+\lambda\mu\alpha_1)\eta]\,\varphi_2, \tag{4}$$

где p — постоянный параметр.

Параметры φ_1, φ_2 будут определяться из условия минимума среднеквадратичной величины неувязок, стоящих в правых частях системы (4).

Как будет следовать из дальнейших выкладок, параметр p должен принимать значения

$$p=\frac{1}{2}(2k+1)\,\nu \text{ или } p=(k+1)\,\nu \quad (k=0, 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Пусть H — среднеквадратичная величина от правых частей системы (4) по переменным ξ и η соответственно в интервалах $[0, c]$, $[c, 0]$ и по независимой переменной t в интервале $[0, T]$. Интервалы для ξ и η выбираются, исходя из выражений, стоящих в левых частях системы (4). Имеем

$$H=H(p, \lambda, \mu, \varphi_1, \varphi_2). \tag{6}$$

Определяем теперь $\varphi_1=\varphi_1^*$ и $\varphi_2=\varphi_2^*$ так, чтобы выполнялось условие

$$H(p, \lambda, \mu, \varphi_1^*, \varphi_2^*)=\min_{\varphi_1, \varphi_2} H(p, \lambda, \mu, \varphi_1, \varphi_2). \tag{7}$$

Находим

$$\frac{\partial H(p, \lambda, \mu, \varphi_1, \varphi_2)}{\partial\varphi_1}=0, \qquad \frac{\partial H(p, \lambda, \mu, \varphi_1, \varphi_2)}{\partial\varphi_2}=0. \tag{8}$$

Соотношение (8) относительно $\varphi_1=\varphi_1^*$, $\varphi_2=\varphi_2^*$ представляет собой систему линейных однородных алгебраических уравнений, имеющих нетривиальное решение при условии

$$h(p, \lambda, \mu)=\begin{vmatrix} h_1(p, \lambda, \mu) & h^*(p, \lambda, \mu) \\ h^*(p, \lambda, \mu) & h_2(p, \lambda, \mu) \end{vmatrix}=0, \tag{9}$$

где $h_1=\dfrac{\partial^2 H}{\partial\varphi_1^2}$, $\quad h_2=\dfrac{\partial^2 H}{\partial\varphi_2^2}$, $\quad h^*=\dfrac{\partial^2 H}{\partial\varphi_1\partial\varphi_2}$.

Уравнение (9) — одно из уравнений системы, из которой будут определяться параметры λ и μ.

Заметим, что минимум среднеквадратичной величины $H(p, \lambda, \mu, \varphi_1, \varphi_2)$ не зависит от пределов изменения ξ и η.

Среднеквадратичную минимальность выражений, стоящих в правых частях уравнений (4), будем характеризовать малым параметром ε. Тогда система (4) перепишется в виде

$$\frac{d\xi}{dt}+p\eta=\varepsilon\,[g_1(p, \lambda, \mu, \nu t)\,\xi+g_2(p, \lambda, \mu, \nu t)\,\eta],$$
$$\frac{d\eta}{dt}-p\xi=\varepsilon\,[f_1(p, \lambda, \mu, \nu t)\,\xi+f_2(p, \lambda, \mu, \nu t)\,\eta], \tag{10}$$

где g_1, g_2, f_1 и f_2 — известные функции своих аргументов.

Запишем теперь систему (10) в стандартной форме, для чего введем новые переменные

$$\xi+i\eta=(a+ib)\exp(-ipt). \tag{11}$$

Имеем

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon\,[\gamma_1(p, \lambda, \mu, pt, \nu t)\, a + \gamma_2(p, \lambda, \mu, pt, \nu t)\, b],$$
$$\frac{db}{dt} = \varepsilon\,[\rho_1(p, \lambda, \mu, pt, \nu t)\, a + \rho_2(p, \lambda, \mu, pt, \nu t)\, b] \tag{12}$$

(здесь γ_1, γ_2, ρ_1 и ρ_2 — известные функции).

Решение стандартной системы (12), согласно [1], в первом приближении запишется в виде

$$a^{(1)} = u(\tau) + \varepsilon U^{(1)}(t, \tau), \quad b^{(1)} = v(\tau) + \varepsilon V^{(1)}(t, \tau). \tag{13}$$

Соотношения (13) можно также рассматривать как формулы, по которым в системе (12) вводятся новые переменные u и v $(\tau = \varepsilon t)$, а $U^{(1)}(t, \tau)$ и $V^{(1)}(t, \tau)$ должны удовлетворять условиям

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} U^{(1)}(T, \tau) = 0, \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} V^{(1)}(T, \tau) = 0. \tag{14}$$

Далее, исходя из (12) и учитывая (13), (14), получаем систему уравнений относительно u и v:

$$\frac{du}{d\tau} = \bar{\gamma}_1 u + \bar{\gamma}_2 v,$$
$$\frac{dv}{d\tau} = \bar{\rho}_1 u + \bar{\rho}_2 v, \tag{15}$$

где коэффициенты имеют вид

$$\bar{\gamma}_1 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int^{T} \gamma_1(p, \lambda, \mu, pt, \nu t)\, dt, \quad \bar{\gamma}_2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int^{T} \gamma_2(p, \lambda, \mu, pt, \nu t)\, dt,$$
$$\bar{\rho}_1 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int^{T} \rho_1(p, \lambda, \mu, pt, \nu t)\, dt, \quad \bar{\rho}_2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int^{T} \rho_2(p, \lambda, \mu, pt, \nu t)\, dt. \tag{16}$$

Функции $U^{(1)}$ и $V^{(1)}$ определяются по формулам

$$U^{(1)} = u \int (\gamma_1 - \bar{\gamma}_1)\, dt + v \int (\gamma_2 - \bar{\gamma}_2)\, dt,$$
$$V^{(1)} = u \int (\rho_1 - \bar{\rho}_1)\, dt + v \int (\rho_2 - \bar{\rho}_2)\, dt. \tag{17}$$

Средние значения (16) в зависимости от параметра p будут отличными от нуля при $p = \frac{1}{2}(2k + 1)\,\nu$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, если коэффициенты системы (1) содержат непарные гармоники угла νt, и при $p = (k + 1)\,\nu$, если они содержат четные гармоники. Для смешанных гармоник параметр p может принимать оба указанные значения.

Подставляя (13) в (12) и учитывая (15), (17), получаем

$$\frac{da^{(1)}}{dt} - \varepsilon(\gamma_1 a^{(1)} + \gamma_2 b^{(1)}) = \varepsilon^2 [\alpha_1^{(1)}(p, \lambda, \mu, \nu t)\, u + \alpha_2^{(1)}(p, \lambda, \mu, \nu t)\, v],$$
$$\frac{db^{(1)}}{dt} - \varepsilon(\rho_1 a^{(1)} + \rho_2 b^{(1)}) = \varepsilon^2 [\beta_1^{(1)}(p, \lambda, \mu, \nu t)\, u + \beta_2^{(1)}(p, \lambda, \mu, \nu t)\, v] \tag{18}$$

(здесь $\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \beta_1^{(1)}$ и $\beta_2^{(1)}$ — известные функции своих аргументов).

Пусть $H^{(1)}$ — среднеквадратичная величина по u, v и t от правых частей соотношения (18). Интервал $[-c_1, c_1]$ для u и v берется произвольный, поскольку уравнение (15) имеет общий вид. Имеем

$$H^{(1)} = H^{(1)}(p, \lambda, \mu). \tag{19}$$

Теперь неизвестные еще параметры λ и μ будем определять так, чтобы они удовлетворяли уравнению (9), а среднеквадратичная величина (19) принимала минимальное значение, т. е. нужно решить задачу на условный экстремум. Для этого введем функцию

$$I = H^{(1)}(p, \lambda, \mu) - lh(p, \lambda, \mu).$$

Далее удовлетворяем условию

$$I(p, \lambda^*, \mu^*) = \min_{\lambda, \mu} I(p, \lambda, \mu). \tag{20}$$

Исходя из (20) и учитывая (9), получаем три уравнения для определения λ^*, μ^* и l.

Среднеквадратичную минимальность правых частей в соотношениях (18) будем, как и выше, характеризовать малым параметром ε, тогда

$$\left|\frac{da^{(1)}}{dt} - \varepsilon(\gamma_1 a^{(1)} + \gamma_2 b^{(1)})\right| \leqslant \varepsilon^3 M_0, \quad \left|\frac{db^{(1)}}{dt} - \varepsilon(\rho_1 a^{(1)} + \rho_2 b^{(1)})\right| \leqslant \varepsilon^3 M_0, \tag{21}$$

где M_0 — постоянная величина.

Пусть действительные значения параметров φ_1^*, φ_2^*, λ^* и μ^* существуют, причем два последних удовлетворяют условию (3). Тогда, как следует из (2), (4), (10) — (13) и (15), учитывая (7), (20) и (21), система дифференциальных уравнений (1) для параметра p, имеющего вид (5), свелась к системе с постоянными коэффициентами (15) в смысле двойного среднеквадратичного приближения.

Изложенный выше метод построения приближенного решения системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами выполнен для параметра p, соответствующего одной гармонике угла νt в разложениях для коэффициентов системы (1).

Общее решение системы (1), учитывая (2), запишется в виде

$$x = \sum_k (\varphi_{k1}\xi_k + \lambda_k \varphi_{k2}\eta_k), \quad y = \sum_k (\mu_k \varphi_{k1}\xi_k + \varphi_{k2}\eta_k),$$

где суммирование происходит по всем гармоникам угла νt в разложениях для коэффициентов $\alpha_1(\nu t)$, $\alpha_2(\nu t)$, $\beta_1(\nu t)$ и $\beta_2(\nu t)$, а величины φ_{k1}, φ_{k2}, λ_k и μ_k определяются из условий (7) и (20) для параметров p, имеющих вид (5).

В итоге приближенное решение системы (1) будет выражаться функцией двух переменных t и $\tau = \varepsilon t$. Решение системы (1) по переменной t будет периода $2T$, если коэффициенты этой системы содержат непарные гармоники угла νt, и периода T, если коэффициенты содержат парные или смешанные гармоники. Поведение решений системы (1) по переменной τ зависит от уравнений с постоянными коэффициентами (15), полученных для каждого значения параметра p.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейный колебаний, Физматгиз, М., 1963.

Поступила 1.XII 1972 г.
Львовский политехнический институт,
Львовский лесотехнический институт

Пусть $H^{(1)}$ — среднеквадратичная величина по u, v и t от правых частей соотношения (18). Интервал $[-c_1, c_1]$ для u и v берется произвольный, поскольку уравнение (15) имеет общий вид. Имеем

$$H^{(1)} = H^{(1)}(p, \lambda, \mu). \tag{19}$$

Теперь неизвестные еще параметры λ и μ будем определять так, чтобы они удовлетворяли уравнению (9), а среднеквадратичная величина (19) принимала минимальное значение, т. е. нужно решить задачу на условный экстремум. Для этого введем функцию

$$I = H^{(1)}(p, \lambda, \mu) - lh(p, \lambda, \mu).$$

Далее удовлетворяем условию

$$I(p, \lambda^*, \mu^*) = \min_{\lambda,\mu} I(p, \lambda, \mu). \tag{20}$$

Исходя из (20) и учитывая (9), получаем три уравнения для определения λ^*, μ^* и l.

Среднеквадратичную минимальность правых частей в соотношениях (18) будем, как и выше, характеризовать малым параметром ε, тогда

$$\left|\frac{da^{(1)}}{dt} - \varepsilon(\gamma_1 a^{(1)} + \gamma_2 b^{(1)})\right| \leqslant \varepsilon^3 M_0, \quad \left|\frac{db^{(1)}}{dt} - \varepsilon(\rho_1 a^{(1)} + \rho_2 b^{(1)})\right| \leqslant \varepsilon^3 M_0, \tag{21}$$

где M_0 — постоянная величина.

Пусть действительные значения параметров φ_1^*, φ_2^*, λ^* и μ^* существуют, причем два последних удовлетворяют условию (3). Тогда, как следует из (2), (4), (10) — (13) и (15), учитывая (7), (20) и (21), система дифференциальных уравнений (1) для параметра p, имеющего вид (5), свелась к системе с постоянными коэффициентами (15) в смысле двойного среднеквадратичного приближения.

Изложенный выше метод построения приближенного решения системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами выполнен для параметра p, соответствующего одной гармонике угла νt в разложениях для коэффициентов системы (1).

Общее решение системы (1), учитывая (2), запишется в виде

$$x = \sum_k (\varphi_{k1}\xi_k + \lambda_k \varphi_{k2}\eta_k), \quad y = \sum_k (\mu_k \varphi_{k1}\xi_k + \varphi_{k2}\eta_k),$$

где суммирование происходит по всем гармоникам угла νt в разложениях для коэффициентов $\alpha_1(\nu t)$, $\alpha_2(\nu t)$, $\beta_1(\nu t)$ и $\beta_2(\nu t)$, а величины φ_{k1}, φ_{k2}, λ_k и μ_k определяются из условий (7) и (20) для параметров p, имеющих вид (5).

В итоге приближенное решение системы (1) будет выражаться функцией двух переменных t и $\tau = \varepsilon t$. Решение системы (1) по переменной t будет периода $2T$, если коэффициенты этой системы содержат непарные гармоники угла νt, и периода T, если коэффициенты содержат парные или смешанные гармоники. Поведение решений системы (1) по переменной τ зависит от уравнений с постоянными коэффициентами (15), полученных для каждого значения параметра p.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейный колебаний, Физматгиз, М., 1963.

Поступила 1.XII 1972 г.
Львовский политехнический институт,
Львовский лесотехнический институт