УДК 512.25/.26+519.3:330.115

Метод лексикографического поиска решений для дискретных задач выпуклого программирования

Ю. Ю. Червак

В данной работе рассматривается метод поиска минимума выпуклой функции $f(x)$ на ограниченном выпуклом многогранном множестве R ($R \subset R^n$), если $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ удовлетворяет условию дискретности

$$x_j \in D_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Здесь $f(x)$ — такая выпуклая функция на R^n или на некотором выпуклом множестве X ($R \subset X$), что точка ее минимума на R^n или на множестве X не является внутренней точкой множества R. Множество R определено системой линейных ограничений

$$Ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0$$

(A — матрица с размерами $m \times n$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)'$). D_j — либо конечное множество, содержащее не менее двух элементов, либо счетное множество без предельных элементов.

Итак, рассматривается дискретная задача

$$\min \{f(x) \mid x \in R; \; x_j \in D_j, \; j = 1, 2, \ldots, n\}. \tag{1}$$

Решение задачи (1) сводится к вычислению лексикографически убывающей конечной последовательности дискретно определенных точек x^r ($r = 0, 1, 2, \ldots$) из множества R.

При этом используются дополнительные линейные ограничения, удовлетворяющие всем решениям задачи (1), но отсекающие часть допустимых решений этой задачи. На r-м шаге метода множество допустимых решений, среди которых ищется решение задачи (1), принадлежит некоторому подмножеству R_r из множества R. Используя идею лексикографического перебора дискретно определенных точек на выпуклом множестве, осуществляем поиск дискретно определенной точки x^{r+1} ($x^{r+1} \in R_r$) такой, что

$$x^{r+1} \prec x^r \text{ и } f(x^{r+1}) < f(x^r) \tag{2}$$

($\prec$ — знак «лексикографически меньше» [1]). Если окажется, что R_r не содержит дискретно определенной точки x^{r+1}, удовлетворяющей условиям (2), то x^r является решением задачи (1).

В качестве начальной точки x^0 выбирается лексикографически наибольшая дискретно определенная точка из множества R. Поиск этой точки можно осуществить методом отсечений [1] или методом Томпсона [2], решая при этом задачу

$$\max \{x_1 \mid x \in R; \, x_j \in D_j, \, j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Использование дополнительных линейных ограничений на каждом шаге основывается на следующем очевидном утверждении.

Теорема 1. *Если $l(x)$ — такая линейная функция, что неравенство $l(x) \leqslant f(x)$ выполняется для всех $x \in R$, тогда*

$$\{x \mid f(x) \leqslant f(x'); \, x \in R\} \subset \{x \mid l(x) \leqslant f(x'); \, x \in R\}$$

для любого фиксированного $x' \in R$.

В качестве линейных функций $l(x)$, удовлетворяющих условию этой теоремы и при помощи которых строятся дополнительные ограничения, используются функции

$$l_r(x) = f(x^r) + (x - x^r)' \nabla f(x^r);$$

являющиеся касательными гиперплоскостями к поверхности $z = f(x)$ в точке x^r. Вектор $\nabla f(x^r)$ является градиентом $f(x)$ в точке x^r.

Обозначим

$$L_i(x^r) = \{x \mid l_i(x) \leqslant f(x^r);\ x \in R\}.$$

Одна из возможных реализаций этого метода состоит в том, что на r-м ($r = 0, 1, 2, \ldots$) шаге множество R_r определяется следующим способом:

$$R_r = \bigcap_{i=0}^{r} L_i(x^r), \text{ если } r \leqslant p, \quad \text{и} \quad R_r = \bigcap_{i=r-p}^{r} L_i(x^r), \text{ если } r > p.$$

Число p ($p \geqslant 0$) — наперед заданное и определяет число $(p+1)$ дополнительных линейных ограничений, учитываемых на одном шаге метода, начиная с p-го шага. Значение p влияет на число шагов, необходимых для достижения решения задачи (1), так как при его увеличении множества R_r должны, вообще говоря, уменьшаться.

Поиск точки x^{r+1}, удовлетворяющей условиям (2), также сводится к вычислению лексикографически убывающей конечной последовательности дискретно определенных точек y^k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) из множества R_r. Здесь $y^0 = x^r$. При этом на k-м подшаге на подмножестве Q_k множества R_r ищется первая, в порядке лексикографического убывания, точка y^{k+1}, следующая за точкой y^k. Если $f(y^{k+1}) < f(x^r)$, то полагаем $x^{r+1} = y^{k+1}$ и переходим к $(r+1)$-му шагу метода. Если $f(y^{k+1}) \geqslant f(x^r)$, то переходим к $(k+1)$-му подшагу r-го шага. Если же точка y^k окажется лексикографически наименьшей дискретно определенной точкой на множестве Q_k, то x^r является решением задачи (1).

Одна из возможных реализаций поиска точки x^{r+1} состоит в том, что множества Q_k определяются следующим образом:

$$Q_0 = R_r,\ Q_k = \{y \mid l_k(y) \leqslant f(y^k);\ y \in R_r\},\ k = 1, 2, \ldots$$

При этом поиск точки y^{k+1}, $k = 0, 1, 2, \ldots$, осуществляется по следующему алгоритму (не теряя общности рассуждений, алгоритм поиска опишем для целочисленного случая). Для этого введем в рассмотрение точку v с переменными координатами $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Будем говорить, что переменные $y_1, y_2, \ldots, y_q$ заблокированы, если их значения зафиксированы и равны текущим значениям соответствующих координат $v_1, v_2, \ldots, v_q$ точки v.

Итак, имеем целочисленную точку $y^k = (y_1^k, y_2^k, \ldots, y_n^k)'$ ($y^k \in Q_k$). Требуется определить целочисленную точку $y^{k+1} = (y_1^{k+1}, y_2^{k+1}, \ldots, y_n^{k+1})'$ ($y^{k+1} \in Q_k$), которая является первой, в порядке лексикографического убывания, целочисленной точкой, непосредственно следующей за точкой y^k.

Изложим описание этого алгоритма по отдельным итерациям.

Начальная итерация. Вводим переменную v_0 и полагаем $v_0 = 1$, $v_j = y_j^k$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

1. Пусть $v_n > 0$. Уменьшаем значение v_n на единицу. Если точка y со всеми заблокированными координатами $y_1, y_2, \ldots, y_n$ принадлежит множеству Q_k, тогда $y^{k+1} = v$.

Пусть эта точка y не принадлежит множеству Q_k и $v_{(n-1)-t} > 0$, $v_{(n-1)-(t-1)} = v_{(n-1)-(t-2)} = \ldots = v_{n-1} = 0$ ($0 \leqslant t \leqslant n-1$). Если $t = n-1$, тогда точка y^{k+1} не существует. (Последнее означает, что точка x^r является решением задачи (1).) Если $t < n-1$, тогда значение $v_{(n-1)-t}$ уменьшаем на единицу и, блокируя переменные $y_1, y_2, \ldots, y_{q_0}$ ($q_0 = (n-1) - t$), переходим к 0-й итерации.

2. Пусть $v_{(n-1)-t} > 0$, $v_{(n-1)-(t-1)} = v_{(n-1)-(t-2)} = \ldots = v_{n-1} = v_n = 0$

$(0 \leqslant t \leqslant n-1)$. Если $t = n-1$, тогда точка y^{k+1} не существует (т. е. x^r является решением задачи (1)). Если $t < n-1$, тогда значение $v_{(n-1)-t}$ уменьшаем на единицу и, блокируя переменные $y_1, y_2, \ldots, y_{q_0}$ $(q_0 = (n-1)-t)$, переходим к 0-й итерации.

s-я итерация $(s \geqslant 0)$. Решаем задачу линейного программирования (заблокированную)

$$\max \{y_{q_s+1} \mid y \in Q_k;\ y_j \text{ — заблокированная}, \quad j = 1, 2, \ldots, q_s\}. \tag{3}$$

1. Пусть задача (3) разрешима и $y^*_{q_s+1}$ является оптимальным значением y_{q_s+1}. Полагаем v_{q_s+1} равным $[y^*_{q_s+1}]$ ($[y^*_{q_s+1}]$ — целая часть числа $y^*_{q_s+1}$).

а) $q_s + 1 = n$. Если точка y со всеми заблокированными координатами $y_1, y_2, \ldots, y_n$ принадлежит множеству Q_k, тогда $y^{k+1} = v$.

Пусть эта точка y не принадлежит множеству Q_k и $v_{(n-1)-t} > 0$, $v_{(n-1)-(t-1)} = v_{(n-1)-(t-2)} = \ldots = v_{n-1} = 0$ $(0 \leqslant t \leqslant n-1)$. Если $t = n-1$, тогда точка y^{k+1} не существует (т. е. x^r является решением задачи (1)). Если $t < n-1$, тогда значение $v_{(n-1)-t}$ уменьшаем на единицу и, блокируя переменные $y_1, y_2, \ldots, y_{q_{s+1}}$ $(q_{s+1} = (n-1)-t)$, переходим к $(s+1)$-й итерации.

б) $q_s + 1 < n$. Блокируем переменные $y_1, y_2, \ldots, y_{q_{s+1}}$ $(q_{s+1} = q_s + 1)$ и переходим к $(s+1)$-й итерации.

2. Пусть задача (3) неразрешима и $v_{(q_s-1)-t} > 0$, $v_{(q_s-1)-(t-1)} = v_{(q_s-1)-(t-2)} = \ldots = v_{q_s-1} = 0$ $(0 \leqslant t \leqslant q_s - 1)$. Если $t = q_s - 1$, тогда точка y^{k+1} не существует (т. е. x^r является решением задачи (1)). Если $t < q_s - 1$, тогда значение $v_{(q_s-1)-t}$ уменьшаем на единицу и, блокируя переменные $y_1, y_2, \ldots, y_{q_{s+1}}$ $(q_{s+1} = (q_s-1)-t)$, переходим к $(s+1)$-й итерации.

Таким образом, решение задачи (1) осуществляется на основе методов линейного программирования.

Оно состоит из повторения решений заблокированных задач линейного программирования вида (3). Общее число таких задач на пути решения дискретной задачи (1) может оказаться большим. Однако значительная часть этих задач имеет малые размеры и, следовательно, очень легко решается. Более того, большая часть таких задач не имеет решения, что может быть установлено с помощью коротких вычислений. Следовательно, общее количество требуемых вычислений на много меньше, чем это кажется на первый взгляд.

Обоснование описанного метода подытожим следующей теоремой.

Теорема 2. *За конечное число шагов получаем решение задачи* (1).

Утверждение конечности метода очевидно. Докажем, что если множество R_r не содержит дискретно определенной точки x^{r+1}, удовлетворяющей условиям (2), то точка x^r является решением задачи (1). Допустим противное, т. е. что множество R_r не содержит дискретно определенной точки x^{r+1}, удовлетворяющей условиям (2), но содержит непустое подмножество R^*_r дискретно определенных точек $(x^r)^*$ таких, что

$$x^r < (x^r)^* \text{ и } f((x^r)^*) < f(x^r).$$

Но множество R^*_r является частью каждого из R- и Q- множеств, рассматриваемых на всех предыдущих шагах и их подшагах. Следовательно, на основании лексикографического поиска дискретно определенных точек (поиск начинается с точки x^0), используемого на каждом шаге, все точки множества R^*_r уже просматривались. Таким образом, множество R^*_r должно быть пустым множеством. Полученное противоречие доказывает теорему.

Пример. Минимизировать

$$f(x) = 4(x_1-4)^2 + 6(x_2+2)^2$$

при условиях

$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 18,$$
$$2x_1 + x_2 \leqslant 13,$$
$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,$$

x_1, x_2 — целые.

Начальный шаг. $x^0 = \operatorname{lex}\max\{x \mid x \in R;\ x$ — целочисленный$\} = (6,1)'$, $f(x^0) = 70$. Пусть $p = 0$.

0-й шаг. $l_0(x) = -62 + 16x_1 + 36x_2$,

$$R_0 = L_0(x^0) = \{x \mid 16x_1 + 36x_2 \leqslant 132;\ x \in R\}.$$

0-й подшаг. $Q_0 = R_0$, $y^1 = (6,0)'$, $f(y^1) = 40$. Следовательно, $x^1 = y^1 = (6,0)'$, $f(x^1) = 40$.

1-й шаг. $l_1(x) = -56 + 16x_1 + 24x_2$,

$$R_1 = L_1(x^1) = \{x \mid 16x_1 + 24x_2 \leqslant 96;\ x \in R\}.$$

0-й подшаг. $Q_0 = R_1$, $y^1 = (5,0)'$, $f(y^1) = 28$. Следовательно, $x^2 = y^1 = (5,0)'$, $f(x^2) = 28$.

2-й шаг. $l_2(x) = -12 + 8x_1 + 24x_2$,

$$R_2 = L_2(x^2) = \{x \mid 8x_1 + 24x_2 \leqslant 40;\ x \in R\}.$$

0-й подшаг. $Q_0 = R_2$, $y^1 = (4,0)'$, $f(y^1) = 24$. Следовательно, $x^3 = y^1 = (4,0)'$, $f(x^3) = 24$.

3-й шаг. $l_3(x) = 24 + 24x_2$,

$$R_3 = L_3(x^3) = \{x \mid x_2 \leqslant 0;\ x \in R\}.$$

0-й подшаг. $Q_0 = R_3$, $y^1 = (3,0)'$, $f(y^1) = 28 > f(x^3)$.

1-й подшаг. $l_1(y) = f(y^1) + (y - y^1)'\nabla f(y^1) = 52 - 8y_1 + 24y_2$,

$$Q_1 = \{y \mid -8y_1 + 24y_2 \leqslant -24;\ y \in R_3\}.$$

Так как $y^1 = (3,0)' = \operatorname{lex}\min\{y \mid y \in Q_1;\ y$ — целочисленный$\}$, то $x^3 = (4,0)'$ является решением задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Корбут, Ю. Ю. Финкельштейн, Дискретное программирование, «Наука», М., 1969.
2. G. L. Thompson, The stopped simplex method: I. Basic theory for mixed integer programming; integer programming, Rev. franç., rech. opérat., 8, N 31, 1964.

Поступила 6.VI 1972 г.,
после переработки — 8.XII 1972 г.

Ужгородский государственный университет