УДК 517.55

Сопряженные функции и аналитические функции двух комплексных переменных

М. С. Шнеерсон, Т. М. Лопатина

Как известно [1], две действительные функции p, a точки некоторой области Δ евклидова пространства $E^n(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ называются сопряженными по В. И. Смирнову, если имеем в указанной области:

$$\sum_{k=1}^{n} (p_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (a_k)^2, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} p_k a_k = 0. \tag{2}$$

Здесь и ниже $a_k = \dfrac{\partial a}{\partial x^k}$, $p_k = \dfrac{\partial p}{\partial x^k}$ и т.д., и все рассматриваемые в этой работе функции предполагаются достаточно гладкими.

В работах [1—3] В. И. Смирнов рассмотрел некоторые свойства сопряженных функций, а также приложения этих функций в теории дифференциальных уравнений.

В случае $n = 3$ сопряженность по В. И. Смирнову тесно связана с понятием сопряженности пары функций относительно вектора, впервые введенным В. С. Федоровым [4]. Согласно [4] две действительные функции p, a точки некоторой области Δ евклидова пространства $E^3(x^1, x^2, x^3)$ называются сопряженными относительно вектора $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3)$, $(\bar{\varepsilon})^2 = 1$, если

$$\operatorname{grad} p = [\bar{\varepsilon}, \operatorname{grad} a], \quad \operatorname{grad} a = [\operatorname{grad} p, \bar{\varepsilon}], \tag{3}$$

где квадратные скобки обозначают векторное произведение указанных векторов, $\varepsilon^k = \varepsilon^k(x^1, x^2, x^3)$, $k = 1, 2, 3$. Из сопряженности пары функций относительно вектора по В. С. Федорову следует сопряженность этой пары по В. И. Смирнову. И наоборот, для любой пары функций, сопряженных по В. И. Смирнову, существует такой вектор, относительно которого эти функции сопряжены по В. С. Федорову.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1 [4]. *Если две пары функций (R, r), (Q, q) сопряжены относительно одного и того же вектора $\bar{\varepsilon}$ по В. С. Федорову, то*

$$R + ir = f(Q + iq),$$

где f — аналитическая функция комплексного переменного $Q + iq$.

Из теоремы 1 вытекает, что множество M пар функций, сопряженных по В. И. Смирнову в случае $n = 3$, естественно разбивается на подмножества $M_{\bar{\varepsilon}}$, каждое из которых есть множество пар, сопряженных по отношению к одному и тому же $\bar{\varepsilon}$.

В данной работе исследуются некоторые свойства множества пар функций, сопряженных по В. И. Смирнову в случае $n = 4$. Заметим при этом, что рассматриваются и комплекснозначные функции p, a, удовлетворяющие уравнениям (1), которые также назовем сопряженными по В. И. Смирнову.

Понятие сопряженности пары функций по В. И. Смирнову при $n = 4$ тесно связано с понятием сопряженности пары функций относительно вектора [5].

Упорядоченную пару (p, a) комплекснозначных функций точки некоторой области Δ евклидова пространства $E^4(x^1, x^2, x^3, x^4)$ называем сопряженной относительно комплексного вектора $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3, 0)$, $(\bar{\varepsilon})^2 = 1$

справа (слева), если

$$Dp = -(Da)\,\tilde{\varepsilon}, \tag{4}$$

$$(Dp = -\tilde{\varepsilon}\,(Da)), \tag{5}$$

где $D \equiv \frac{\partial}{\partial x^4} + \tilde{i}\,\frac{\partial}{\partial x^1} + \tilde{j}\,\frac{\partial}{\partial x^2} + \tilde{k}\,\frac{\partial}{\partial x^3}$, $\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{k}$ — кватернионные единицы, $\tilde{\varepsilon} = \tilde{i}\,\varepsilon^1 + \tilde{j}\,\varepsilon^2 + \tilde{k}\,\varepsilon^3$, $(\tilde{\varepsilon})^2 = -1$, $\varepsilon^k = \varepsilon^k(x^1, x^2, x^3, x^4)$, $k = 1, 2, 3$.

Легко видеть [5], что из (4) (соответственно (5)) следует (1) (при $n = 4$). И наоборот [6], если $\sum\limits_{k=1}^{4} (p_k)^2 \neq 0$, то существуют такие единственные $\widetilde{\varepsilon^1}$, $\widetilde{\varepsilon^2}$, что из (1) (при $n = 4$) вытекает

$$Dp = -(Da)\,\widetilde{\varepsilon^1} \quad \text{и} \quad Dp = -\widetilde{\varepsilon^2}(Da).$$

Поскольку из сопряженности пары действительных функций по В. И. Смирнову следует сопряженность этой пары относительно некоторого вектора справа (слева), то естественно разбить множество N всех пар функций, сопряженных по В. И. Смирнову, на подмножества $N_{\bar{\varepsilon}}$, каждое из которых состоит из пар, сопряженных по отношению к одному и тому же $\bar{\varepsilon}$.

Перейдем к исследованию некоторых свойств подмножеств $N_{\bar{\varepsilon}}$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть R, r, Q, q — действительные функции точки некоторой области Δ евклидова пространства $E^4(x^1, x^2, x^3, x^4)$, связанные условиями:*

$$Dr = -(DR)\,\tilde{\varepsilon}, \quad Dq = -(DQ)\,\tilde{\varepsilon}^*. \tag{6}$$

Тогда, если в Δ якобиан

$$I \equiv \frac{\partial(R, r, Q, q)}{\partial(x^1, x^2, x^3, x^4)} \neq 0, \tag{7}$$

то для любой пары (p, a) такой, что $Dp = -(Da)\,\tilde{\varepsilon}$, в некоторой окрестности каждой точки области Δ выполняется условие

$$a + pi = f(R + ir,\ Q + iq), \tag{8}$$

где f — аналитическая функция двух комплексных переменных $R + ir$, $Q + iq$. Если же в Δ выполняется (6) *и $I = 0$, то в некоторой окрестности каждой точки области Δ имеем*

$$R + ir = f(Q + iq),$$

где f — аналитическая функция комплексного переменного $Q + iq$.

Доказательство. 1. Вначале рассмотрим случай: $I \neq 0$**.

Равенство $Dp = -(Da)\,\tilde{\varepsilon}$ можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^3 & -\varepsilon^2 & \varepsilon^1 \\ -\varepsilon^3 & 0 & \varepsilon^1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & -\varepsilon^1 & 0 & \varepsilon^3 \\ -\varepsilon^1 & -\varepsilon^2 & -\varepsilon^3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

---

* Считаем здесь и ниже, что в каждой точке области Δ имеем $\frac{\partial(Q, q)}{\partial(x^1, x^2)} \neq 0$.

** Этот случай рассмотрен в работе [7] для комплекснозначных функций R, r, Q, q, связанных условиями (6). Тогда $a + pj$ — аналитическая функция двух бикомплексных переменных $R + jr$, $Q + jq$.

Обозначим

$$\varepsilon' = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^3 & -\varepsilon^2 & \varepsilon^1 \\ -\varepsilon^3 & 0 & \varepsilon^1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & -\varepsilon^1 & 0 & \varepsilon^3 \\ -\varepsilon^1 & -\varepsilon^2 & -\varepsilon^3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{W} = \begin{pmatrix} R_1 & r_1 & Q_1 & q_1 \\ R_2 & r_2 & Q_2 & q_2 \\ R_3 & r_3 & Q_3 & q_3 \\ R_4 & r_4 & Q_4 & q_4 \end{pmatrix}^{*}. \tag{10}$$

Далее, совершая преобразование координат по формулам

$$\begin{aligned} y^1 &= R(x^1, x^2, x^3, x^4), \quad y^2 = r(x^1, x^2, x^3, x^4), \\ y^3 &= Q(x^1, x^2, x^3, x^4), \quad y^4 = q(x^1, x^2, x^3, x^4), \end{aligned} \tag{11}$$

тем самым приведем равенство (9) к виду

$$\begin{pmatrix} a_{(1)} \\ a_{(2)} \\ a_{(3)} \\ a_{(4)} \end{pmatrix} = (\mathbb{W})^{-1}\,\varepsilon'\mathbb{W} \begin{pmatrix} p_{(1)} \\ p_{(2)} \\ p_{(3)} \\ p_{(4)} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где $a_{(k)} \equiv \dfrac{\partial a}{\partial y^k}$, $p_{(k)} \equiv \dfrac{\partial p}{\partial y^k}$, $k = 1,2,3,4$. А так как по условию теоремы

$$Dr = -(DR)\,\tilde{\varepsilon}, \quad Dq = -(DQ)\,\tilde{\varepsilon},$$

то, как легко видеть, имеем

$$(\mathbb{W})^{-1}\,\varepsilon'\mathbb{W} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

а поэтому из (12) следует

$$a_{(1)} = p_{(2)}, \quad a_{(2)} = -p_{(1)}, \quad a_{(3)} = p_{(4)}, \quad a_{(4)} = -p_{(3)}. \tag{13}$$

Отсюда получаем (8), и, таким образом, теорема доказана для случая $I \neq 0$.

2. Пусть имеет место (6) и в Δ

$$I = 0. \tag{14}$$

Из (4) следует, что существуют такие действительные функции α, β, γ, δ, одновременно тождественно не равные нулю в области Δ, так что имеем

$$\sigma_k \equiv \alpha R_k + \beta r_k + \gamma Q_k + \delta q_k = 0 \quad (k = 1,2,3,4), \tag{15}$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{4} \sigma_k R_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{4} \sigma_k r_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{4} \sigma_k Q_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{4} \sigma_k q_k = 0. \tag{16}$$

В [6] показано, что из (6) следует

$$\sum_{k=1}^{4} (R_k)^2 = \sum_{k=1}^{4} (r_k)^2, \quad \sum_{k=1}^{4} R_k r_k = 0,$$

---

* $R_k \equiv \dfrac{\partial R}{\partial x^k}$, $r_k \equiv \dfrac{\partial r}{\partial x^k}$, $k = 1,2,3,4$. Аналогично для Q,q.

$$\sum_{k=1}^{4}(Q_k)^2=\sum_{k=1}^{4}(q_k)^2,\quad \sum_{k=1}^{4}Q_kq_k=0, \tag{17}$$

$$\sum_{k=1}^{4}R_kQ_k=\sum_{k=1}^{4}r_kq_k,\quad \sum_{k=1}^{4}R_kq_k=-\sum_{k=1}^{4}r_kQ_k.$$

Определитель системы (16), неизвестными в которой считаем $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, как нетрудно видеть, равен нулю, откуда

$$\frac{\left(\sum_{k=1}^{4}R_kQ_k\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{4}R_kq_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{4}(R_k)^2\sum_{k=1}^{4}(Q_k)^2}=1. \tag{18}$$

Но из (18) следует, что векторы $\{R_k\}$, $\{Q_k\}$, $\{q_k\}$ $(k=1,2,3,4)$ лежат в одной двумерной плоскости.

Используя (17), нетрудно показать, что вектор $\{r_k\}$ также лежит в двумерной плоскости, образованной векторами $\{Q_k\}$, $\{q_k\}$. Легко видеть, что поскольку векторы $\{R_k\}$, $\{r_k\}$, $\{Q_k\}$, $\{q_k\}$ $(k=1,2,3,4)$, связанные условиями (17), лежат в одной двумерной плоскости, то имеем

$$R_k+ir_k=(\varphi+i\psi)\,Q_k+iq_k), \tag{19}$$

где φ, ψ — некоторые действительные функции (скалярные). Из (19) следует, что в некоторой окрестности каждой точки области Δ имеем

$$R+ir=f\,(Q+iq), \tag{20}$$

где f — аналитическая функция комплексного переменного $Q+iq$ [8]. Теорема доказана.

Замечание. Теорема, аналогичная теореме 2, имеет место и в случае

$$Dr=-\tilde{\varepsilon}\,(DR),\quad Dq=-\tilde{\varepsilon}\,(DQ). \tag{21}$$

Поскольку имеет место теорема 2, то возникает вопрос: найдется ли для любой пары $(R,\ r)$ действительных функций, сопряженных по В. И. Смирнову, другая пара $(Q,\ q)$ действительных функций такая, что обе пары окажутся сопряженными по отношению к одному и тому же вектору, и при этом $I\neq 0$.

Покажем, что поставленный вопрос эквивалентен следующему: найдется ли для любой пары $(R,\ r)$ функций, сопряженных по В. И. Смирнову, другая пара функций $(Q,\ q)$ такая, что будет иметь место система (17), и при этом $I\neq 0$?

Можно доказать, что имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Для того чтобы для двух пар* $(R,\ r)$, $(Q,\ q)$ *действительных функций точки некоторой области* Δ *евклидова пространства* $E^4(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4)$, *удовлетворяющих в* Δ *условию* (7): $I\neq 0$, *имело место* (17), *необходимо и достаточно выполнения лишь одного из условий* (21):

$$Dr=-\tilde{\varepsilon}\,(DR),\quad Dq=-\tilde{\varepsilon}\,(DQ).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Смирнов, О сопряженных функциях в многомерном эвклидовом пространстве. III, Вестник ЛГУ, № 5, 1954.
2. В. И. Смирнов, О сопряженных функциях. I, Вестник ЛГУ, № 8, 1953.
3. В. И. Смирнов, О сопряженных функциях. II, Вестник ЛГУ, № 11, 1953.

4. В. С. Федоров, О моногенности в пространстве, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 9, № 4, 1945.
5. М. С. Шнеерсон, Обобщенные моногенные функции Г. Моисила и обобщенные сопряженные функции В. С. Федорова, УМЖ, т. 14, № 4, 1962.
6. Т. М. Лопатина, Некоторые свойства сопряженных функций, сб. Некоторые дифференциальные уравнения математической физики и теории колебаний, Изд. Ивановского энергетического ин-та, 1970.
7. М. С. Шнеерсон, Сопряженные функции и аналитические функции двух бикомплексных переменных, Тезисы докладов итоговой научно-технической конференции, Изд. Ивановского энергетического ин-та, 1970.
8. И. А. Морев, Об одном классе моногенных функций, Матем. сб., т. 50 (92), вып. 2, 1960.

Поступила 9.VII 1971 г.,
после переработки — 20.VI 1972 г.
Ивановский энергетический институт