УДК 517.948.32:517.544

Краевая задача Гильберта на римановой поверхности с краем в классах обобщенных функций и дифференциалов

С. А. Яценко

1. Пусть $\mathfrak{M}$ — конечная ориентируемая риманова поверхность рода $h \geqslant 0$ с краем $\partial\mathfrak{M}$, состоящим из $(\rho+1)$ связных компонент. Как известно [1, 2], поверхность $\mathfrak{M}$ гомеоморфна сфере с h ручками, из которой удалено $(\rho+1)$ открытых непересекающихся областей, гомеоморфных кругу. Край ориентированный так, что при обходе $\partial\mathfrak{M}$ в положительном направлении открытая риманова поверхность $\mathfrak{M}/\partial\mathfrak{M}$ остается слева. Предполагается, что поверхность $\mathfrak{M}$ снабжена стандартной конформной структурой [1]. При таком выборе конформной структуры край $\partial\mathfrak{M}$ будет заведомо бесконечно гладким.

2. Пусть $S_{(g)} = \{g(t)\}$ и $S_{(dh)} = \{dh(t)\}$, $t \in \partial\mathfrak{M}$ — основные пространства [3], а $S'_{(dh)} = \{f\}$ и $S'_{(g)} = \{d\varphi\}$ — пространства обобщенных функций и дифференциалов.

Пусть $\gamma(t) \in S_{(g)}$, $|\gamma(t)| = 1$, а D — произвольный дивизор, расположенный на $\mathfrak{M}/\partial\mathfrak{M}$; $\overset{*}{f}$ — произвольная вещественная обобщенная функция, характеризующаяся равенством

$$\operatorname{Im}(\overset{*}{f}, dr(t)) = 0, \tag{1}$$

где $dr(t)$ — произвольный вещественный основной дифференциал.

В пространстве обобщенных функций введем аналоги предельных значений мероморфных на $\mathfrak{M}/\partial\mathfrak{M}$ функций, кратных дивизору D^{-1}.

Определение 1. Назовем каждую обобщенную функцию из $S'_{(dh)}$ обобщенной функцией типа «+» — $f^{+}_{\mathfrak{M}}$, если для любого мероморфного на поверхности $\mathfrak{M}/\partial\mathfrak{M}$ дифференциала $d\psi(p)$, кратного там дивизору D и предельное значение которого $d\psi^{+}(t) \in S_{(dh)}$, выполняется равенство

$$(f^{+}_{\mathfrak{M}}, d\psi^{+}(t)) = 0. \tag{2}$$

Сформулируем краевую задачу Гильберта в пространстве $S'_{(dh)}$: найти все обобщенные функции $f^{+}_{\mathfrak{M}}$ по условию

$$\operatorname{Re}[\overline{\gamma(t)}\, f^{+}_{\mathfrak{M}}] = \overset{*}{f}. \tag{3}$$

Для решения задачи (3) применим схему метода дубля [4] и сведем ее к равносильной краевой задаче Римана в классе обобщенных функций на замкнутой римановой поверхности R рода $h_1 = 2h + \rho$ — дубле поверхности $\mathfrak{M}$. С этой целью введем следующее определение.

Определение 2. Две обобщенные функции из пространства $S'_{(dh)}$ назовем обобщенными функциями типа «$\pm$» относительно дубля $R - f_R^{\pm}$, если для любого кусочно-мероморфного на R и кратного там дивизору $D\widetilde{D}$ дифференциала $d\Psi(p)$, предельные значения которого $d\Psi^{\pm}(t) \in S_{(dh)}$, выполняются равенства

$$(f_R^{\pm}, d\Psi^{\pm}(t)) = 0, \quad t \in \partial\mathfrak{M}. \tag{4}$$

Здесь дивизор $\widetilde{D} \in \widetilde{\mathfrak{M}}$, где $\widetilde{\mathfrak{M}}$ — «симметричная к $\mathfrak{M}$» поверхность с краем [2, 5]. Условие (3) допускает другую форму записи:

$$f_{\mathfrak{M}}^{+} = G(t)\, \overline{f}_{\mathfrak{M}}^{+} + \hat{f}, \tag{5}$$

где $G(t) = -\gamma^2(t)$, $\hat{f} = 2\gamma(t)\overset{*}{f}$. Произведем замену в условии (5), положив

$$f_{\mathfrak{M}}^{+} = f_R^{+}, \quad \overline{f}_{\mathfrak{M}}^{+} = f_R^{-}.$$

Такая замена правомерна. Действительно, возьмем на дубле R произвольный кусочно-мероморфный дифференциал $dF(p)$, кратный $D\widetilde{D}$ и для которого $dF^{\pm}(t) \in S_{(dh)}$. Учитывая, что

$$dF(p) = \begin{cases} d\psi(p), & p \in \mathfrak{M},\ D/(d\psi), \\ dV(\widetilde{p}), & \widetilde{p} \in \widetilde{\mathfrak{M}},\ \widetilde{D}/(dV), \end{cases} \tag{6}$$

где $dV(\widetilde{p}) = \overline{dV(p)}$, а также очевидное равенство $(\overline{f}, dh(t)) = (f, \overline{dh(t)})$, приходим к следующему результату:

$$(f_{\mathfrak{M}}^{+}, dF^{+}(t)) = (f_{\mathfrak{M}}^{+}, d\psi^{+}(t)) = 0, \quad (\overline{f}_{\mathfrak{M}}^{+}, dF^{-}(t)) = (\overline{f}_{\mathfrak{M}}^{+}, dV^{+}(t)) =$$

$$= \overline{(f_{\mathfrak{M}}^{+}, dV^{+}(t))} = 0.$$

Таким образом, краевая задача Гильберта (3) сведена к равносильной ей задаче Римана в том же классе на замкнутой римановой поверхности R (дубле)

$$f_R^{+} = G(t)\, f_R^{-} + \hat{f}. \tag{7}$$

3. Для решения задачи (7) рассмотрим сопряженную к ней задачу Римана на дубле R в пространстве $S_{(dh)}$

$$d\Psi^{+}(t) = \frac{1}{G(t)}\, d\Psi^{-}(t) + dh(t), \quad D\widetilde{D}/(d\Psi), \tag{8}$$

для которой необходимые и достаточные условия разрешимости имеют вид

$$\int_{\partial\mathfrak{M}} \Phi_k^{+}(t)\, dh(t) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, l, \tag{9}$$

где $\Phi_k(p)$ — линейно независимые решения однородной задачи Римана на дубле R в пространстве $S_{(g)}$

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t), \quad D^{-1}\widetilde{D}^{-1}/(\Phi). \tag{10}$$

Обозначая выделяемое условиями (9) подпространство основных функций через $S_{(dh)}$ и используя методику [3] построения решения задачи Римана на замкнутой римановой поверхности в классе обобщенных функций, выпишем функционалы, определяющие искомые компоненты задачи (7) — $f_R^{\pm}$:

1) $\widetilde{S}_{(dh)} = S_{(dh)}$,

$$(f_R^+, dh(t)) = -\left(\widehat{f}, \frac{d\Psi^-(t)}{G(t)}\right), \quad (f_R^-, dh(t)) = -\left(\widehat{f}, \left[\frac{dh(t)}{G(t)}\right]^+\right); \tag{11}$$

2) $\widetilde{S}_{(dh)} \subset S_{(dh)}$,

$$(f_k^+, dh(t)) = -\left(\widehat{f}, \frac{d\Psi^-(t)}{G(t)}\right) + \left(\sum_{k=1}^{l} C_k \Phi_k^+(t),\, dh(t)\right), \tag{12}$$

$$(G(t)\,f_R^-, dh(t)) = -\left(\widehat{f}, \frac{d\Psi^-(t)}{G(t)}\right) - (\widehat{f}, dh(t)) + \left(\sum_{k=1}^{l} C_k \Phi_k^+(t),\, dh(t)\right),$$

где C_k — произвольные комплексные постоянные. При этом должны быть выполнены необходимые и достаточные условия разрешимости

$$(\widehat{f}, d\Psi_k^+(t)) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, l'. \tag{13}$$

Эквивалентность полных картин разрешимости задачи Римана на замкнутой римановой поверхности в пространствах основных и обобщенных функций позволяет вычислить индекс задачи (7)

$$l - l' = \operatorname{Ind} G(t) + \operatorname{ord}(D\widetilde{D}) - h_1 + 1 = 2(\varkappa + \operatorname{ord} D) - 2h - \rho + 1,$$

где $\varkappa = \operatorname{Ind} \overline{\gamma(t)}$.

4. Результаты предыдущего пункта могут быть переформулированы в терминах задачи Гильберта (3). Для этого следует потребовать выполнения «условий симметрии» [5] для компонент $f_R^{\pm}$: $f_R^+ = \overline{f_R^-}$, а также выполнения этих условий для решений задач (8) и (10): $\Phi(p) = \overline{\Phi(\widetilde{p})}$, $d\Psi(p) = \overline{d\Psi(\widetilde{p})}$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Для разрешимости задачи* (3) *необходимо и достаточно выполнения условий*

$$(\overset{*}{f}, \gamma(t)\, d\Psi_k^+(t)) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, l'. \tag{14}$$

Если эти условия выполнены, то решение дается формулами:

$$(f_{\mathfrak{M}}^+, dh(t)) = 2\,(\overset{*}{f}, \overline{\gamma(t)\, d\Psi^+(t)}), \quad \widetilde{S}_{(dh)} = S_{(dh)}, \tag{15}$$

$$(f_{\mathfrak{M}}^+, dh(t)) = 2\,(\overset{*}{f}, \overline{\gamma(t)\, d\Psi^+(t)}) + \left(\sum_{k=1}^{l} \overset{*}{C}_k \Phi_k^+(t),\, dh(t)\right), \quad \widetilde{S}_{(dh)} \subset S_{(dh)},$$

где $\overset{*}{C}_k$ — произвольные вещественные постоянные.

Вся изложенная выше теория справедлива и для задачи Гильберта на римановой поверхности с краем в пространстве $S'_{(g)} = \{d\varphi\}$

$$\operatorname{Re}[\gamma(t)\, d\varphi_{\mathfrak{M}}^+] = d\overset{*}{\varphi}, \tag{16}$$

где $d\varphi^{+}_{\mathfrak{M}}$ — аналог предельного значения мероморфного на $\mathfrak{M}/\partial\mathfrak{M}$ дифференциала, кратного дивизору D (обобщенный дифференциал типа «+»), а $\overset{*}{d\varphi}$ — произвольный вещественный дифференциал.

Теорема 2. *Для разрешимости задачи* (16) *необходимо и достаточно выполнения условий*

$$(\overset{*}{d\varphi}, \overline{\gamma(t)}\,\Phi_k^{+}(t)) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, l. \tag{17}$$

Если эти условия выполнены, то решение дается формулами:

$$(d\varphi^{+}_{\mathfrak{M}}, g(t)) = 2\left(\overset{*}{d\varphi}, \left[\overline{\frac{\Phi^{+}(t)}{\gamma(t)}}\right]\right), \quad \widetilde{S}_{(g)} = S_{(g)}, \tag{18}$$

$$(d\varphi^{+}_{\mathfrak{M}}, g(t)) = 2\left(\overset{*}{d\varphi}, \left[\overline{\frac{\Phi^{+}(t)}{\gamma(t)}}\right]\right) + \left(\sum_{k=1}^{l'} \overset{*}{d}_k d\Psi_k^{+}(t), g(t)\right), \quad \widetilde{S}_{(g)} \subset S_{(g)}.$$

Здесь $\widetilde{S}_{(g)}$ — подпространство основных функций, удовлетворяющих условиям $\int\limits_{\partial\mathfrak{M}} g(t)\, d\Psi_k^{+}(t) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, l'$; $\overset{*}{d}_k$ — произвольные вещественные постоянные, а $\Phi^{+}(t)$ — удовлетворяющее «условию симметрии» решение задачи Римана на R в пространстве $S_{(g)}$

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\,\Phi^{-}(t) + g(t), \quad D^{-1}\widetilde{D}^{-1}l(\Phi).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. И. Зверович, Теория двухэлементных краевых задач на римановых поверхностях и ее приложения, Автореферат докт. дисс., Минск, 1972.
2. М. Шиффер и Д. К. Спенсер, Функционалы на конечных римановых поверхностях, ИЛ, М., 1957.
3. С. А. Яценко, Краевая задача Римана в пространствах обобщенных функций и дифференциалов на замкнутой римановой поверхности, сб. Краевые задачи математической физики, Изд. Института математики АН УССР, К., 1972.
4. Э. И. Зверович, Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровских классах на римановых поверхностях, УМН, т. 24, вып. 1(157), 1971.
5. W Koppelman, Singular integral equations, boundary value problem and the Rieman — Roch theorem, J. of Math. and Mech., 10, N 2, 1961, 247—277.

Поступила 29.XII 1972 г.

Одесский государственный университет