УДК 517.512.2

Классы функций $\Lambda_p(\alpha, \beta)$ и коэффициенты Фурье

Л. П. Кагадий

Для функций одной переменной в ряде работ Лоренца [1]. А. А. Конюшкова [2, 3], А. Ф. Тимана и М. Ф. Тимана [4] и других приведены оценки для некоторых сумм из коэффициентов Фурье. К такого рода оценкам приходят, если не накладывать никаких ограничений на поведение коэффициентов Фурье (монотонность, выпуклость и т. д.). В этих случаях удается судить о принадлежности функции к тому или иному классу и наоборот из принадлежности функции к некоторому классу описывать поведение сумм из коэффициентов Фурье.

Приведем для функций двух переменных некоторые результаты такого рода. Пусть ряд

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} (a_{mn} \cos mx \cos ny + b_{mn} \sin mx \cos ny + \\ + c_{mn} \cos mx \sin ny + d_{mn} \sin mx \sin ny) \tag{1}$$

является рядом Фурье некоторой измеримой интегрируемой периодической с периодом 2π относительно каждой из переменных функции $f(x, y)$. Обозначим через

$$\sigma_{mn} = \left\{ \sum_{i,j=m,n}^{\infty} (|a_{ij}|^p + |b_{ij}|^p + |c_{ij}|^p + |d_{ij}|^p) \right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{2}$$

$$\delta_{mn} = \left\{ \sum_{i,j=1,1}^{m,n} (|a_{ij}|^p + |b_{ij}|^p + |c_{ij}|^p + |d_{ij}|^p) \right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{3}$$

В дальнейшем будем считать, что:

1) если функция $f(x, y) \in L_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ на $[0, 2\pi; 0, 2\pi]$ и

$$\left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | f(x+h, y+t) - f(x-h, y+t) - f(x+h, y-t) + \\ + f(x-h, y-t)|^p \, dxdy \right\}^{\frac{1}{p}} = O(h^{\alpha} t^{\beta}) \qquad (0 < \alpha, \ \beta < 1), \tag{4}$$

то $f(x, y) \in \Lambda_p(\alpha, \beta)$;

2) если $f(x, y) \in C$ на $[0, 2\pi; 0, 2\pi]$ и

$$| f(x+h, y+t) - f(x-h, y+t) - f(x+h, y-t) + \\ + f(x-h, y-t)| = O(h^{\alpha} t^{\beta}), \tag{5}$$

то $f(x, y) \in \Lambda(\alpha, \beta)$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть функция* $f(x, y) \in \Lambda(\alpha, \beta)$ *имеет ряд Фурье* (1). *Тогда, если:*

а) $\alpha, \beta > \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, *то*

$$\sigma_{mn} = O\left(\frac{1}{m^{\alpha + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}} n^{\beta + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}}} \right); \tag{6}$$

б) $\alpha, \beta < \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, *то*

$$\sigma_{mn} = O\left(\frac{1}{m^{\alpha + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}} n^{\beta + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}}} \right); \tag{7}$$

в) $\alpha, \beta = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, *то*

$$\delta_{mn} = O(\log^{\frac{1}{p}} m \log^{\frac{1}{p}} n). \tag{8}$$

Теорема 2. *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна и имеет ряд Фурье* (1). *Тогда, если при любых $m, n \geqslant 1$ для ее коэффициентов Фурье выполняется условие*

$$\sigma_{mn} = O\left(\frac{1}{m^\alpha n^\beta}\right), \quad \frac{1}{q} < \alpha, \beta < 1 + \frac{1}{q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{9}$$

то $f(x, y) \in \Lambda\left(\alpha - \frac{1}{q}, \beta - \frac{1}{q}\right)$.

Теорема 3. *Пусть измеримая, интегрируемая функция $f(x, y)$ имеет ряд Фурье* (1). *Тогда, если при любых $m, n \geqslant 1$ для ее коэффициентов Фурье выполнено условие*

$$\sigma_{mn} = O\left(\frac{1}{m^\alpha n^\beta}\right), \qquad 0 < \alpha, \beta < 1, \ 1 \leqslant p \leqslant 2, \tag{10}$$

то $f(x, y) \in \Lambda_q(\alpha, \beta)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Если требовать лишь принадлежность функции $f(x, y)$ к L_r $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$, то для сумм δ_{mn} можно указать следующий порядок роста.

Теорема 4. *Пусть функция $f(x, y) \in L_r$ $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$. Тогда, если:*

а) $1 \leqslant r \leqslant 2$, *то при* $p < r'$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$,

$$\delta_{mn} = O\left[(mn)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r'}}\right];$$

б) $r \geqslant 2$, *то при* $1 \leqslant p < 2$

$$\delta_{mn} = O\left[(mn)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}}\right].$$

Доказательство теоремы 1. а) Так как для $\Delta_{2h,2t} f(x - h, y - t) = f(x - h, y - t) - f(x + h, y - t) - f(x - h, y + t) + f(x + h, y + t)$ ряд Фурье имеет вид

$$4 \sum_{m,n=1}^{\infty} (a_{mn} \sin mx \sin ny - b_{mn} \cos mx \sin ny -$$

$$- c_{mn} \sin mx \cos ny + d_{mn} \cos mx \cos ny) \sin mh \sin nt, \tag{11}$$

то в силу равенства Парсеваля находим, что

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \rho_{mn}^2 (\sin mh \sin nt)^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{\Delta_{2h,2t} f(x - h, y - t)\}^2 \, dx dy,$$

где $\rho_{mn} = (a_{mn}^2 + b_{mn}^2 + c_{mn}^2 + d_{mn}^2)^{\frac{1}{2}}$. Отсюда в силу того, что $f(x, y) \in \Lambda(\alpha, \beta)$, получим

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \rho_{mn}^2 (\sin mh \sin nt)^2 = O\left[h^{2\alpha} t^{2\beta}\right].$$

Поэтому при любом m и n

$$\sum_{i,j=m,n}^{2m-1,2n-1} (a_{ij}^2 + b_{ij}^2 + c_{ij}^2 + d_{ij}^2)(\sin ih \sin jt)^2 = O(|h|^{2\alpha} |t|^{2\beta}).$$

Пусть $h=\frac{\pi}{4m}$, $t=\frac{\pi}{4n}$. Тогда, учитывая, что $\sin^2 ih \geqslant \frac{1}{2}$ при $m \leqslant i \leqslant m-1$, $\sin^2 jt \geqslant \frac{1}{2}$ при $n \leqslant j \leqslant 2n-1$, имеем

$$\sum_{i,j=m,n}^{2m-1,2n-1} (a_{ij}^2+b_{ij}^2+c_{ij}^2+d_{ij}^2)=O\left(\frac{1}{m^{2\alpha}n^{2\beta}}\right).$$

Применяя теперь неравенство Гельдера, находим

$$\sum_{i,j=m,n}^{2m-1,2n-1} (|a_{ij}|^p+|b_{ij}|^p+|c_{ij}|^p+|d_{ij}|^p) \leqslant$$

$$\leqslant (4mn)^{1-\frac{p}{2}}\left\{\sum_{i,j=m,n}^{2m-1,2n-1} (a_{ij}^2+b_{ij}^2+c_{ij}^2+d_{ij}^2)\right\}^{\frac{p}{2}}.$$

Тогда

$$\sum_{i,j=m,n}^{2m-1,2n-1} (|a_{ij}|^p+|b_{ij}|^p+|c_{ij}|^p+|d_{ij}|^p)=O\left(\frac{1}{m^{p\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)-1}n^{p\left(\beta+\frac{1}{2}\right)-1}}\right). \quad (12)$$

Учитывая, что $\alpha, \beta > \frac{1}{p}-\frac{1}{2}$, заключаем

$$\sigma_{mn}=\left\{\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}\sum_{i,j=2^{\mu}m,2^{\nu}n}^{2^{\mu+1}m-1,2^{\nu+1}n-1} (|a_{ij}|^p+|b_{ij}|^p+|c_{ij}|^p+|d_{ij}|^p\right\}^{\frac{1}{p}}=$$

$$=O\left[\frac{1}{m^{\alpha+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}n^{\beta+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}}\left\{\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{p\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)-1}}\right)^{\mu}\left(\frac{1}{2^{p\left(\beta+\frac{1}{2}\right)-1}}\right)^{\nu}\right\}^{\frac{1}{p}}\right]=$$

$$=O\left[\frac{1}{m^{\alpha+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}n^{\beta+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}}\right].$$

б) Определяя u_0 и v_0 из соотношений

$$2^{u_0} \leqslant m < 2^{u_0+1}, \quad 2^{v_0} \leqslant n < 2^{v_0+1}$$

и учитывая (12), получим

$$\left\{\sum_{i,j=1,1}^{m,n} (|a_{ij}|^p+|b_{ij}|^p+|c_{ij}|^p+|d_{ij}|^p)\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\sum_{u,v=0}^{u_0,v_0}\sum_{i,j=2^u,2^v}^{2^{u+1}-1,2^{v+1}-1} (|a_{ij}|^p+|b_{ij}|^p+|c_{ij}|^p+|d_{ij}|^p)\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\sum_{u,v=0}^{u_0,v_0} 2^{\left(1-p\alpha-\frac{p}{2}\right)u}2^{\left(1-p\beta-\frac{p}{2}\right)v}\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant 2^{u_0\left(\frac{1}{p}-\alpha-\frac{1}{2}\right)}2^{v_0\left(\frac{1}{p}-\beta-\frac{1}{2}\right)}=$$

$$=O\,[m^{\frac{1}{p}-\alpha-\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{p}-\beta-\frac{1}{2}}].$$

в) Для $\alpha, \beta = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$, как и выше, находим

$$\left\{\sum_{i,j=u_0,v_0}^{m,n} (|a_{ij}|^p + |b_{ij}|^p + |c_{ij}|^p + |d_{ij}|^p)\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant (u_0+1)^{\frac{1}{p}} (v_0+1)^{\frac{1}{p}} = O[\log^{\frac{1}{p}} m \log^{\frac{1}{p}} n].$$

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим сначала случай $p = 1$. Тогда имеем

$$\sum_{i,j=m,n}^{\infty} \gamma_{ij} = \sum_{i,j=m,n}^{\infty} (|a_{ij}| + |b_{ij}| + |c_{ij}| + |d_{ij}|) = O\left[\frac{1}{m^\alpha n^\beta}\right].$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{i,j=m,n}^{2m-1;2n-1} \gamma_{ij} = O\left[\frac{1}{m^\alpha n^\beta}\right],$$

поэтому

$$\sum_{i;j=m,n}^{2m-1,2n-1} ij\gamma_{ij} = O\left[\frac{1}{m^{\alpha-1} n^{\beta-1}}\right].$$

В силу того, что ряд Фурье для $\Delta_{2h,2t} f(x-h, y-t)$ имеет вид (11), находим

$$|\Delta_{2h,2t} f(x-h, y-t)| \leqslant 4 \sum_{\mu,\nu=1}^{m,n} \sum_{i,j=2^{\mu-1},2^{\nu-1}}^{2^\mu-1,2^\nu-1} \gamma_{ij} ij |h||t| + 4 \sum_{i,j=2^m,2^n}^{\infty} \gamma_{ij} +$$

$$+ 4 \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{i;j=2^{\mu-1},2^n}^{2^\mu-1,\infty} \gamma_{ij} i |h| + 4 \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{i,j=2^m,2^{\nu-1}}^{\infty,2^\nu-1} \gamma_{ij} j |t| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{|h||t| \sum_{\mu;\nu=1}^{m,n} 2^{(1-\alpha)(\mu-1)} 2^{(1-\beta)(\nu-1)} + \frac{1}{2^{\alpha m+\beta n}} + |h| \sum_{\mu=1}^{m} 2^{(1-\alpha)(\mu-1)} \frac{1}{2^{\beta n}} + \right.$$

$$\left. + |t| \sum_{\nu=1}^{n} 2^{(1-\beta)(\nu-1)} \frac{1}{2^{\alpha m}}\right\} \leqslant \left\{|h||t| 2^{(1-\alpha)m} 2^{(1-\beta)n} + \frac{1}{2^{\alpha m+\beta n}} + \right.$$

$$\left. + \frac{|h|}{2^{\beta n}} 2^{(1-\alpha)m} + \frac{|t|}{2^{\alpha m}} 2^{(1-\beta)n}\right\}.$$

Если выберем m и n так, чтобы

$$\frac{1}{2^m} < |h| \leqslant \frac{1}{2^{m-1}}, \quad \frac{1}{2^n} < |t| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}},$$

то

$$|\Delta_{2h,2t} f(x-h, y-t)| = O\left(\frac{1}{2^{m\alpha+n\beta}}\right) = O(|h|^\alpha |t|^\beta).$$

Доказан следующий частный случай теоремы: если $\sum\limits_{i,j=m,n}^{\infty} \gamma_{ij} = O\left(\frac{1}{m^{\alpha} n^{\beta}}\right)$, то $f(x, y) \in \Lambda_1(\alpha, \beta)$. В общем случае

$$\left\{\sum_{i,j=m,n}^{\infty} (|a_{ij}|^p + |b_{ij}|^p + |c_{ij}|^p + |d_{ij}|^p)\right\}^{\frac{1}{p}} = O\left(\frac{1}{m^{\alpha} n^{\beta}}\right).$$

Достаточно показать, что из этого следует

$$\sum_{i,j=m,n}^{\infty} \gamma_{ij} = O\left(\frac{1}{m^{\alpha-\frac{1}{q}} n^{\beta-\frac{1}{q}}}\right).$$

Для $p < \infty$ имеем

$$\sum_{i,j=m,n}^{2m-1,2n-1} (|a_{ij}|^p + |b_{ij}|^p + |c_{ij}|^p + |d_{ij}|^p) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=m,n}^{\infty} (|a_{ij}|^p + |b_{ij}|^p + |c_{ij}|^p + |d_{ij}|^p) = O\left(\frac{1}{m^{\alpha p} n^{\beta p}}\right).$$

В силу неравенства Гельдера имеем

$$\sum_{i,j=m,n}^{2m-1,2n-1} \gamma_{ij} \leqslant \left\{\sum_{i,j=m,n}^{2m-1,2n-1} (|a_{ij}|^p + |b_{ij}|^p + |c_{ij}|^p + |d_{ij}|^p)\right\}^{\frac{1}{p}} \{4mn\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= O\left(\frac{1}{m^{\alpha-\frac{1}{q}} n^{\beta-\frac{1}{q}}}\right).$$

Тогда

$$\sum_{i,j=m,n}^{\infty} \gamma_{ij} = \sum_{u,v=0}^{\infty} \left(\sum_{i,j=2^u m, 2^v n}^{2^{u+1}m-1, 2^{v+1}n-1} \gamma_{ij}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{u,v=0}^{\infty} \frac{4^{\frac{1}{q}}}{m^{1-\frac{1}{q}} n^{1-\frac{1}{q}}} \left(\frac{1}{2^{\left(\alpha-\frac{1}{q}\right)u}}\right)\left(\frac{1}{2^{\left(\beta-\frac{1}{q}\right)v}}\right) = O\left(\frac{1}{m^{\alpha-\frac{1}{q}} n^{\beta-\frac{1}{q}}}\right).$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Учитывая условие (10), в силу теоремы Хаусдорфа — Юнга [5, стр. 153] $f(x, y) \in L_q$. Так как Фурье функции $\Delta_{2h,2t} f(x-h, y-t)$ имеет вид (11), получим

$$\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_{2h,2t} f(x-h, y-t)|^q \, dxdy\right\}^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\sum_{i,j=1}^{\infty} (|a_{ij}|^p + |b_{ij}|^p + |c_{ij}|^p + |d_{ij}|^p)(\sin ih \sin jt)^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{u,v=0}^{m-1,n-1} \left\{\sum_{i,j=2^u, 2^v}^{2^{u+1}-1, 2^{v+1}-1} \omega_{ij}\right\}^{\frac{1}{p}} ij\,|h|\,|t| + \left\{\sum_{i,j=2^m, 2^n}^{\infty} \omega_{ij}\right\}^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\sum_{u=0}^{m-1}\left\{\sum_{i,j=2^u,2^n}^{2^{u+1}-1,\infty}\omega_{ij}\right\}^{\frac{1}{p}} i\,|h|+\sum_{v=0}^{n-1}\left\{\sum_{i,j=2^v,2^m}^{2^{v+1}-1,\infty}\omega_{ij}\right\}^{\frac{1}{p}} j\,|t|,$$

где $\omega_{ij}=|a_{ij}|^p+|b_{ij}|^p+|c_{ij}|^p+|d_{ij}|^p$. Если учесть, что

$$\sum_{i,j=m,n}^{2m-1,2n-1}(ij)^p\,\omega_{ij}\leqslant 4\,(mn)^p\sum_{i,j=m,n}^{\infty}\omega_{ij}=O\,(m^{p-\alpha p}n^{p-\beta p}),$$

то

$$\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\Delta_{2h,2t}f(x-h,y-t)|^q\,dxdy\right\}^{\frac{1}{q}}\leqslant\left\{\sum_{u,v=0}^{m-1,n-1}2^{(1-\alpha)u}2^{(1-\beta)v}\,|h|\,|t|+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2^{\alpha m+\beta n}}+\sum_{u=0}^{m-1}2^{(1-\alpha)u}\frac{1}{2^{\beta n}}\,|h|+\sum_{v=0}^{n-1}2^{(1-\beta)v}\frac{1}{2^{\alpha m}}\,|t|\right\}.$$

Так же, как в теореме 1, получаем, что

$$\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\Delta_{2h,2t}f(x-h,y-t)|^q\,dxdy\right\}^{\frac{1}{q}}=O\,(|h|^{\alpha}\,|t|^{\beta}).$$

Доказательство теоремы 4. а) В силу теоремы Хаусдорфа — Юнга имеем

$$\left\{\sum_{i;j=1}^{\infty}(|a_{ij}|^{r'}+|b_{ij}|^{r'}+|c_{ij}|^{r'}+|d_{ij}|^{r'})\right\}^{\frac{1}{r'}}\leqslant\|f(x,y)\|_{L_r}.$$

Отсюда для $p<r'$ находим

$$\delta_{mn}\leqslant\delta_{MN}+\left\{\sum_{i,j=1,N+1}^{M,n}\omega_{ij}\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\sum_{i,j=M+1,1}^{m,N}\omega_{ij}\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\sum_{i,j=M+1,N+1}^{m,n}\omega_{ij}\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\sum_{i;j=1,N+1}^{M,\infty}(|a_{ij}|^{r'}+|b_{ij}|^{r'}+|c_{ij}|^{r'}+|d_{ij}|^{r'})\right\}^{\frac{1}{r'}}(n-N)^{\left(1-\frac{p}{r'}\right)\frac{1}{p}}+$$

$$+\left\{\sum_{i,j=M+1,1}^{\infty,N}(|a_{ij}|^{r'}+|b_{ij}|^{r'}+|c_{ij}|^{r'}+|d_{ij}|^{r'})\right\}^{\frac{1}{r'}}(m-M)^{\left(1-\frac{p}{r'}\right)\frac{1}{p}}+$$

$$+\left\{\sum_{i,j=M+1,N+1}^{\infty}(|a_{ij}|^{r'}+|b_{ij}|^{r'}+|c_{ij}|^{r'}+|d_{ij}|^{r'})\right\}^{\frac{1}{r'}}\times$$

$$\times[(m-M)\,(n-N)]^{\left(1-\frac{p}{r'}\right)\frac{1}{p}}+\delta_{MN}=\delta_{MN}+s_1+s_2+s_3.$$

Тогда

$$\frac{\delta_{mn}}{(mn)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r'}}}\leqslant\frac{\delta_{MN}+s_1+s_2+s_3}{(mn)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r'}}}.$$

Если выбрать M и N, а затем m и n достаточно большими, то получим

$$\delta_{mn}=O\,[(mn)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r'}}].$$

б) Для $p < 2$ $(r' = 2)$ первая часть теоремы утверждает, что

$$\delta_{mn} = O\left[(mn)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}}\right].$$

Это неравенство тем более справедливо для $r' > 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Lorentz, Fourier—Koeffizienten und Funktionen klassen, Math. Z., **51**, 1948, 135—150.
2. А. А. Конюшков, О классах Липшица, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 21, №3, 1957.
3. А. А. Конюшков, Наилучшие приближения тригонометрическими многочленами и коэффициенты Фурье, Матем. сб., т. 44(86), вып. 1, 1958.
4. А. Ф. Тиман, М. Ф. Тиман, Обобщенный модуль непрерывности и наилучшее приближение в среднем, ДАН СССР, т. 71, № 1, 1950.
5. А. А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, т. 2, «Мир», М., 1965.

Поступила 14.II 1972 г.,
после переработки — 26.VI 1972 г.

Днепропетровский металлургический институт