УДК 519.217

О стационарном распределении управляемого ветвящегося процесса и одной задаче оптимизации

Р. В. Бойко

Рассмотрим однородный управляемый ветвящийся процесс $\xi(t)$. Суть управления ветвящимся процессом состоит в том, что вероятности деления каждой частицы, существующей в момент t, за малый промежуток времени Δt зависят от количества частиц в момент t.

Процессы такого рода изучались в работе [1].

Нас будут интересовать условия существования стационарного распределения такого вида управляемых ветвящихся процессов.

Итак, пусть $\xi(t)$ — такой управляемый ветвящийся процесс: если количество частиц $\xi(t)$ в момент времени t равно m, то каждая частица независимо от остальных частиц за промежуток времени $(t, t+\Delta t)$ превращается в k частиц (k — натуральное и $k \neq 1$) с вероятностью

$$\pi_k(m)\,\Delta t + o(\Delta t) \text{ при } 0 < m \leqslant N$$

и с вероятностью

$$\mu_k \Delta t + o(\Delta t) \text{ при } m > N,$$

или остается неизменной с вероятностью

$$1+\pi_1(m)\,\Delta t\quad\left(\pi_k(m)\geqslant 0,\ k\neq 1;\quad \pi_1(m)\leqslant 0,\quad \sum_{k=0}^{\infty}\pi_k(m)=0\right)$$

$$\text{при } 0<m\leqslant N$$

и с вероятностью

$$1+\mu_1\Delta t+o(\Delta t)\quad\left(\mu_k\geqslant 0,\ k\neq 1,\ \mu_1\leqslant 0,\quad \sum_{k=0}^{\infty}\mu_k=0\right)\ \text{при } m>N.$$

Будем считать, что $\pi_0(m)=0$, $m=\overline{1,N}$, а $\mu_0>0$. Обозначим через $P_{ij}(t)$ переходные вероятности процесса $\xi(t)$:

$$P_{ij}(t)=P\{\xi(t)=j,\ \xi(0)=i\}.$$

Введем еще такие обозначения:

$$\varphi_m(z)=\sum_{k=1}^{\infty}z^k\pi_k(m), \tag{1}$$

$$\psi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}z^k\mu_k. \tag{2}$$

Как и в [1], будем предполагать, что для $\psi(z)$ выполняется следующее условие: для произвольного $\varepsilon>0$

$$\int_{1-\varepsilon}^{1}\psi^{-1}(u)\,du=\infty \tag{3}$$

Кроме того, будем считать, что

$$\psi'(1)=\sum_{k=1}^{\infty}k\mu_k<\infty \tag{4}$$

Теорема 1. *Если выполнены условия* (3), (4), *то стационарное распределение управляемого ветвящегося процесса* $\xi(t)$ *существует тогда и только тогда, когда* $\psi'(1)<0$ *и его производящая функция дается формулой:*

$$U(z)=\sum_{k=N}^{\infty}P_kz^k=\frac{1}{1-N\int_0^1 x^{N-1}\psi^{-1}(x)\,\varphi_N(x)\,dx}\times$$

$$\times\left[z^N-N\int_0^z x^{N-1}\psi^{-1}(x)\,\varphi_N(x)\,dx\right]. \tag{5}$$

Доказательство. Во-первых, можно показать (аналогично тому, как это делается в [2, стр. 420]), что финальные вероятности процесса $\xi(t)$ $P_{ij}(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty}P_{ij}(t)$ при фиксированном i совпадают со стационарным распределением $\{P_j\}$ процесса $\xi(t)$ и не зависят от i. Поэтому вопрос о существовании и нахождении стационарного распределения можно рассматривать как задачу о нахождении финальных вероятностей $P_{ij}(\infty)$ и изучении условий сходимости ряда $\sum\limits_{j=0}^{\infty}P_{ij}(\infty)$.

Очевидно, что в этом случае достаточно рассматривать переходные вероятности $P_{ij}(t)$ для $i > N$.

При выполнении (3) в [1] было найдено, что

$$F_i(s, z) = \sum_{k=N+1}^{\infty} z^k \int_0^{\infty} e^{-st} P_{ik}(t)\, dt = \exp\left\{s \int_0^z \psi^{-1}(x)\, dx\right\} \int_0^z \psi^{-1}(x) \left[\sum_{k=0}^{N} (sx^k - \right.$$

$$\left. - kx^{k-1} \varphi_k(x)) \widetilde{P}_{ik}(s) - x^i \right] \exp\left\{- s \int_0^x \psi^{-1}(u)\, du\right\} dx, \tag{6}$$

где $\widetilde{P}_{ik}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} P_{ik}(t)\, dt$.

Так как $i > N$, то из-за того, что $\pi_0(N) = 0$, следует, что $\widetilde{P}_{ik}(s) = 0$ при $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Тогда в силу теоремы 32.3 [3]

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} P_k z^k = \sum_{k=N+1}^{\infty} z^k P_{ik}(\infty) = \lim_{s \to 0} sF_i(s, z). \tag{7}$$

Используя (6), перепишем (7) так:

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} P_k z^k = \lim_{s \to 0} s \exp\left\{s \int_0^z \psi^{-1}(x)\, dx\right\} \int_0^z \psi^{-1}(x) \left[(sx^N - Nx^{N-1} \varphi_N(x)) \widetilde{P}_{iN}(s) - \right.$$

$$\left. - x^i\right] \exp\left\{- s \int_0^x \psi^{-1}(u)\, du\right\} dx = - NP_N \int_0^z \psi^{-1}(x)\, \varphi_N(x)\, dx.$$

Тогда

$$U(z) = \sum_{k=N}^{\infty} z^k P_k = P_N z^N - P_N N \int_0^z \psi^{-1}(x)\, x^{N-1} \varphi_N(x)\, dx. \tag{8}$$

Таким образом, стационарное распределение управляемого ветвящегося процесса $\xi(t)$ существует тогда и только тогда, когда

$$I = \left| \int_0^1 \psi^{-1}(x)\, x^{N-1} \varphi_N(x)\, dx \right| < c, \tag{9}$$

где c — некоторая константа.

Нетрудно показать, что для ограниченности интеграла I необходимо и достаточно, чтобы $\psi'(1) < 0$.

Действительно, если $\psi'(1) < 0$, то, как известно, уравнение

$$\psi(x) = 0 \tag{10}$$

при $0 \leqslant x \leqslant 1$ имеет единственный простой корень $x = 1$, но по предположению и $\varphi_N(1) = 0$. Отсюда очевидно, что I ограничен.

Пусть выполняется (9). Докажем, что тогда $\psi'(1) < 0$. Предположим противное, т. е. что $\psi'(1) \geqslant 0$. Если $\psi'(1) = 0$, то это значит, что $x = 1$ — кратный корень уравнения (10). Когда $\psi'(1) > 0$, то на интервале $0 < x \leqslant 1$ уравнение (10), кроме корня $x = 1$, имеет еще один корень $\alpha < 1$.

В силу этого интеграл I расходится. Мы пришли к противоречию. Отсюда следует, что $\psi'(1) < 0$.

Значение P_N можно найти таким образом. Так как выполняется условие регулярности (3), то

$$U(1) = \sum_{k=N}^{\infty} P_k = P_N - P_N N \int_0^1 \psi^{-1}(x)\, x^{N-1} \varphi_N(x)\, dx = 1.$$

Отсюда находим:

$$P_N = \frac{1}{1 - N\int\limits_0^1 \psi^{-1}(x)\, x^{N-1} \varphi_N(x)\, dx}. \tag{11}$$

Теорема доказана.

Рассмотрим одну задачу оптимизации. Пусть есть управляемый ветвящийся процесс $\xi(t)$, у которого существует стационарное распределение. Допустим, что за время пребывания процесса $\xi(t)$ выше уровня N платится штраф в размере

$$C(\mu_0)\int\limits_0^T \chi_{\{\xi(t)>N\}}\, dt,$$

где $C(\mu_0)$ — положительная, непрерывная, монотонно возрастающая функция, $\chi_{\{\cdot\}}$ — индикатор события. Задача состоит в следующем: как управлять величиной вероятности гибели частицы после уровня N, чтобы поддерживать процесс на заданном уровне оптимальным образом, т. е. чтобы средняя величина штрафа за единицу времени

$$S(\mu_0) = C(\mu_0) \lim_{T\to\infty} M\left\{\frac{1}{T}\int\limits_0^T \chi_{\{\xi(t)>N\}}\, dt\right\}$$

была минимальной.

Изучение поведения функции $S(\mu_0)$ и будет ответом на поставленную задачу.

Заметим, что

$$M\left\{\frac{1}{T}\int\limits_0^T \chi_{\{\xi(t)>N\}}\, dt\right\} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T P\{\xi(t)>N\}\, dt = \int\limits_0^1 P\{\xi(t\cdot T)>N\}\, dt.$$

Тогда получим

$$S(\mu_0) = C(\mu_0) \lim_{T\to\infty} M\left\{\frac{1}{T}\int\limits_0^T \chi_{\{\xi(t)>N\}}\, dt\right\} = C(\mu_0) \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^1 P\{\xi(t\cdot T)>N\}\, dt =$$

$$= C(\mu_0)\sum_{k=N+1}^{\infty} P_k = C(\mu_0)(1-P_N), \tag{12}$$

где $P_k = P_k(\mu_0)$ $(k=N, N+1, \ldots)$ — стационарное распределение процесса $\xi(t)$.

Учитывая (11), (12) можно переписать так:

$$S(\mu_0) = C(\mu_0)(1-P_N(\mu_0)) = \frac{-N\dfrac{C(\mu_0)}{\mu_0}\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x^{N-1}\varphi_N(x)\, dx}{1-x+\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\mu_k}{\mu_0}(x^k-x)}}{1-N\displaystyle\int \frac{x^{N-1}\varphi_N(x)\, dx}{\mu_0(1-x)+\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\mu_k(x^k-x)}}. \tag{13}$$

Исходя из вида формулы (13), можно сделать следующие выводы.

1. Если функция $C(\mu_0)$ такая, что

$$\lim_{\mu_0 \to \infty} \frac{C(\mu_0)}{\mu_0} = 0,$$

то штраф тем меньше, чем больше μ_0.

2. Если

$$\lim_{\mu_0 \to \infty} \frac{C(\mu_0)}{\mu_0} = c_1 \neq 0 \text{ или } \lim_{\mu_0 \to \infty} \frac{C(\mu_0)}{\mu_0} = \infty$$

и

$$C'(\mu_0)(1 - P_N(\mu_0)) \geqslant C(\mu_0) P'_N(\mu_0),$$

то в этом случае величина штрафа уменьшается с уменьшением μ_0. Заметим, что μ_0 всегда должно быть строго больше $\sum_{k=2}^{\infty} \mu_k (k-1)$, так как в противном случае стационарное распределение процесса $\xi(t)$ не существует.

3. Если выполнены условия:

а) существует μ_0^* такое, что

$$C'(\mu_0^*)(1 - P_N(\mu_0^*)) - C(\mu_0^*) P'_N(\mu_0^*) = 0;$$

б)

$$C''(\mu_0)(1 - P_N(\mu_0)) - 2C'(\mu_0) P'_N(\mu_0) - C(\mu_0) P''_N(\mu_0) > 0$$

при $\mu_0 > \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \mu_k$, тогда средняя величина штрафа за единицу времени достигает минимума в точке μ_0^*.

В заключение считаю своим приятным долгом поблагодарить А. В. Скорохода за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. В. Бойко, Об одном управляемом ветвящемся процессе, УМЖ, т. 26, № 2, 1974.
2. И. И. Гихман, А. В. Скороход, Введение в теорию случайных процессов, «Наука», М., 1965.
3. Г. Деч, Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования, «Наука», М., 1971.

Поступила 12.XII 1972 г.
Институт математики АН УССР