УДК 517.94

Об одном проекционно-итеративном методе определения периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений

В. И. Гречко

В данной работе рассматривается метод для исследования периодических систем, сочетающий в себе идеи методов Л. Чезари [1] и А. М. Самойленко [2, 3] и одного из вариантов проекционно-итеративного метода, который применительно к уравнениям общего вида исследовал Н. С. Курпель [4]. Метод дает возможность находить периодические решения в виде сходящихся последовательностей периодических функций со скоростью геометрической прогрессии, в которой знаменатель прогрессии стремится к нулю при некоторых предположениях.

Рассмотрим нелинейную периодическую дифференциальную систему

$$\frac{dx}{dt} = g(x, t), \tag{1}$$

где $x(t)$, $g(x, t)$ — ν-мерные векторы, $g(x, t)$ — действительная векторная функция, 2π-периодическая по t для всех $(x, t) \in D \times (-\infty, \infty)$, где $D \subset E^\nu$ — ограниченная замкнутая область.

Введем пространство $\widetilde{C}$ 2π-периодических, непрерывных ν-мерных векторных функций с нормой

$$\| v(t) \| = \max_t | v(t) |, \quad v(t) \in \widetilde{C}, \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{2}$$

где $|v(t)|$ — евклидова норма.

Пусть $\widetilde{C}_D = \{x \in \widetilde{C} : x(t) \in D \ \forall\ t\}$.

Под $P_0 v(t)$ будем понимать нулевой член разложения функции $v(t) \in \widetilde{C}$ в ряд Фурье, т. е.

$$P_0 v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(s)\, ds,$$

а под $P_m v\,(t)$ — сумму m членов этого разложения по синусам и косинусам, начиная с $m = 1$.

Для нахождения периодического решения уравнения (1) применим алгоритм, согласно которому последовательные приближения $x_{n+1}(t, x_0)$ находятся из уравнений

$$x_{n+1}(t, x_0) = x_0 + \int_0^t P_m g\,(x_{n+1}(s, x_0), s)\, ds +$$
$$+ \int_0^t (I - P_0 - P_m)\, g\,(x_n(s, x_0), s)\, ds \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{3}$$

где I — единичный оператор, $x_0 \in D$, $x_0\,(t, x_0) = x_0$. Уравнения (3) сводятся к алгебраической или трансцендентной системе $2\nu m$ уравнений с $2\nu m$ неизвестными при каждом фиксированном n.

Алгоритм (3) является обобщением алгоритма работы [2]. Если в формуле (3) вместо разложения функции $g\,(x, t)$ в ряд Фурье до m-го порядка ограничиться только нулевым членом разложения $P_0 g\,(x, t)$, то получим алгоритм работы [2].

Пусть для функции $g\,(x, t)$, определенной в области $(x, t) \in D \times (-\infty, \infty)$, выполняются условия:

$$|g\,(x, t)| \leqslant M; \tag{4}$$

$$|g\,(x, t) - g\,(y, t)| \leqslant N\,|x - y|; \tag{5}$$

$$q_m = 2N\delta\sigma\,(m) < 1; \tag{6}$$

$$N < \frac{\sqrt{3}}{2\pi}. \tag{7}$$

Здесь и в дальнейшем используются следующие обозначения:

$$\delta = \frac{1}{1 - \dfrac{2\pi N}{\sqrt{3}}}\,; \;\; a\,(m) = 2M\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \sigma\,(m)\right); \;\; \sigma^2\,(m) = 2(m+1)^{-2} + (m+2)^{-} + \ldots \tag{8}$$

Имеем $\sigma\,(m) < m^{-\frac{1}{2}}$, $\quad \sigma\,(0) = \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Используя [1, 5], можно установить неравенство для функции $v\,(t) \in \widetilde{C}$:

$$\left\| \int_0^t [v\,(s) - P_m v\,(s)]\, ds \right\| \leqslant 2\sigma\,(m)\, \|v\,(t)\|, \tag{9}$$

где под $P_m v\,(t)$ понимается сумма членов разложения $v\,(t)$ в ряд Фурье, в которую входит и нулевой член $P_0 v\,(t)$.

Обозначим через $T\,(x, y)$ оператор, определяемый правой частью уравнений (3), т. е.

$$T\,(x, y) = x_0 + \int_0^t P_m g\,(x, s)\, ds + \int_0^t (I - P_0 - P_m)\, g\,(y, s)\, ds \;\; (x, y \in \widetilde{C}).$$

Теорема 1. *Пусть* $x = \varphi\,(t)$ *есть* 2π-*периодическое решение системы* (1), *проходящее при* $t = 0$ *через точку* $x_0 \in D - a\,(m)$*. *Пусть имеют место соотношения* (4) — (7).

* $D - a(m)$ означает множество точек, входящих в D вместе со своей $a(m)$-окрестностью, причем под $a(m)$-окрестностью точки $\bar{x}$ понимается множество точек x, для которых $|x - \bar{x}| < a(m)$.

Тогда последовательные приближения $x_{n+1}(t, x_0)$ однозначно определяются из уравнений (3) *и равномерно сходятся к* $\varphi(t)$, *причем*

$$\|\varphi(t) - x_n(t, x_0)\| \leqslant \frac{q_m^n}{1-q_m} \|x_1(t, x_0) - x_0\|, \tag{10}$$

где $q_m \to 0$ *при* $m \to \infty$.

Доказательство. Заметим, что для функции $v(t)$, справедлива следующая оценка:

$$\left\| \int_0^t P_m v(s)\, ds \right\| \leqslant 2 \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|v(t)\| \leqslant \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \|v(t)\|. \tag{11}$$

Докажем однозначную разрешимость уравнений (3) относительно $x_{n+1}(t, x_0)$. Для этого найдем оценку константы Липшица оператора $T(x, y)$ по x. Из (3) для $x, \bar{x} \in \widetilde{C}_D$, учитывая соотношение (11), имеем

$$\|T(x, y) - T(\bar{x}, y)\| = \left\| \int_0^t P_m (g(x, s) - g(\bar{x}, s))\, ds \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \|g(x, t) - g(\bar{x}, t)\| \leqslant \frac{2\pi N}{\sqrt{3}} \|x - \bar{x}\|.$$

В силу условия (7) $T(x, y)$ —оператор сжатия на множестве $\widetilde{C}_D$ и поскольку $T\widetilde{C}_D \subset \widetilde{C}_D$, то в силу принципа Банаха уравнения (3) однозначно разрешимы в $\widetilde{C}_D$.

Из (3), используя условия теоремы, соотношения (9), (11), получаем

$$\|x_1(t, x_0) - x_0\| \leqslant \left\| \int_0^t P_m g(x_1, s)\, ds \right\| + \left\| \int_0^t (I - P_0 - P_m)\, g(x_0, s)\, ds \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \|g(x_0, t)\| + 2\sigma(m) \|g(x_0, t)\| \leqslant \frac{2\pi M}{\sqrt{3}} + 2M\sigma(m).$$

Отсюда, учитывая обозначения (8), имеем

$$\|x_1(t, x_0) - x_0\| \leqslant a(m). \tag{12}$$

Аналогично получим для всех n

$$\|x_n(t, x_0) - x_0\| \leqslant a(m). \tag{13}$$

Докажем сходимость последовательности (3). Используя соотношения (9), (11), имеем

$$\|x_2(t, x_0) - (x_1(t, x_0)\| \leqslant \left\| \int_0^t P_m (g(x_2(s, x_0), s) - g(x_1(s, x_0) s)\, ds \right\| +$$

$$+ \left\| \int_0^t (I - P_0 - P_m)(g(x_1(s, x_0), s) - g(x_0, s))\, ds \right\| \leqslant \frac{2\widetilde{\pi} N}{\sqrt{3}} \|x_2(t, x_0) -$$

$$- x_1(t, x_0)\| + 2N\sigma(m) \|x_1(t, x_0) - x_0\|.$$

Отсюда получаем

$$\| x_2(t, x_0) - x_1(t, x_0) \| \leqslant \frac{2N\sigma(m)}{1 - \frac{2\pi N}{\sqrt{3}}} \| x_1(t, x_0) - x_0 \| = q_m \| x_1(t, x_0) - x_0 \|. \tag{14}$$

По индукции имеем

$$\| x_{n+1}(t, x_0) - x_n(t, x_0) \| \leqslant q_m^n \| x_1(t, x_0) - x_0 \|. \tag{15}$$

Далее

$$\| x_{n+p}(t, x_0) - x_n(t, x_0) \| \leqslant q_m^n \sum_{i=0}^{p-1} q_m^i \| x_1(t, x_0) - x_0 \|. \tag{16}$$

Из последнего неравенства с учетом условия (6) следует равномерная относительно $(t, x_0) \in (-\infty, \infty) \times D - a(m)$ сходимость функций $x_n(t, x_0)$ к некоторой функции $x_\infty(t, x_0)$. В силу указанных предположений функция $x_\infty(t, x_0)$ будет непрерывной, а периодичность $x_\infty(t, x_0)$ по t вытекает из периодичности функций $x_n(t, x_0)$. Из (16) следует оценка

$$\| x_\infty(t, x_0) - x_n(t, x_0) \| \leqslant \frac{q_m^n}{1 - q_m} \| x_1(t, x_0) - x_0 \|, \tag{17}$$

а из (13) вытекает, что $\| x_\infty(t, x_0) - x_0 \| \leqslant a(m)$. Переходя в равенствах (3) к пределу при $n \to \infty$, убеждаемся, что $x_\infty(t, x_0)$ есть периодическое решение уравнения

$$x(t, x_0) = x_0 + \int_0^t [g(x(t, x_0), t) - P_0 g(x(t, x_0), t)]\, dt. \tag{18}$$

Поскольку функция $\varphi(t)$ как периодическое решение уравнения (1) удовлетворяет уравнению

$$x(t) = x_0 + \int_0^t g(x(t), t)\, dt \tag{19}$$

и обладает свойством

$$P_0 g(\varphi(t), t) = 0, \tag{20}$$

то из уравнений (19), (20) следует, что $\varphi(t)$ как и $x_\infty(t, x_0)$ является периодическим решением уравнения (18). Поэтому покажем единственность решения уравнения (18) и, следовательно, равенство $\varphi(t) = x_\infty(t, x_0)$ докажем методом от противного. Пусть $y_1(t, x_0)$, $y_2(t, x_0)$ — два различных решения уравнения (18). Используя (9), (11), имеем

$$\| y_1(t, x_0) - y_2(t, x_0) \| = \Big\| \int_0^t [g(y_1(s, x_0), s) - g(y_2(s, x_0), s) -$$

$$- P_0 g(y_1(s, x_0), s) + P_0 g(y_2(s, x_0), s)]\, ds \Big\| = \Big\| \int_0^t (I - P_0)(g(y_1(s, x_0), s) -$$

$$- g(y_2(s, x_0), s))\, ds \Big\| \leqslant \frac{2\pi N}{\sqrt{3}} \| y_1(t, x_0) - y_2(t, x_0) \|.$$

В силу условия (7) $\| y_1(t, x_0) - y_2(t, x_0) \| = 0$, т. е. $y_1(t, x_0) = y_2(t, x_0)$, что и завершает доказательство теоремы.

Рассмотрим вопрос существования периодического решения ура нения (1). Обозначим через $\Delta(x_0)$ выражение

$$\Delta(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x_\infty(t, x_0), t)\, dt. \tag{21}$$

Поскольку $x_\infty(t, x_0)$ будет периодическим решением (1) в случае $\Delta(x_0) = 0$, то существование периодического решения уравнения (1) связано с существованием нулей функции $\Delta(x_0)$. Вообще для доказательства существования решения уравнения (21) можно применять теорию непрерывных отображений. Будем находить отображение (21) приближенно. Для этого обозначим через $\Delta_n(x_0)$ выражение

$$\Delta_n(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x_n(t, x_0), t)\, dt. \tag{22}$$

Легко доказать, что $\Delta_n \to \Delta$ при $n \to \infty$, а именно, воспользовавшись оценкой (17), имеем

$$|\Delta(x_0) - \Delta_n(x_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \| g(x_\infty(s, x_0), s) - g(x_n(s, x_0), s) \|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant Na(m) \frac{q_m^n}{1 - q_m}. \tag{23}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть для системы* (1), *заданной в области* D *пространства* E^ν, *кроме условий* (4)—(7), *выполняются следующие условия*:

1) *отображение* Δ_n *имеет изолированную особую точку*: $\Delta_n(x^0) = 0$;

2) *индекс этой точки отличен от нуля*;

3) *существует замкнутая выпуклая область* D_1, *принадлежащая* $D - a(m)$ *и имеющая* x^0 *единственной особой точкой, такая, что на ее границе* Γ_{D_1} *выполняется неравенство*

$$\inf_{x \in \Gamma_{D_1}} |\Delta(x)| > Na(m) \frac{q_m^n}{1 - q_m}. \tag{24}$$

Тогда система (1) *имеет периодическое решение, для которого* $x(0) \in D_1$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы существования в работе [3].

Предположим, что существование периодического решения системы (1), заданной в области $D \subset E^\nu$ и для которой выполнены условия (4)—(7), установлено. Чтобы найти это решение, необходимо вычислить функции $x_n(t, x_0)$ последовательности (3) и отыскать точку x_0, через которую при $t = 0$ проходит периодическое решение.

Теорема 3. *Для того, чтобы в* D_1 *нашлась точка, в которой* $\Delta = 0$, *необходимо, чтобы при* $t = 0$, *всех* n *и любого* $x_1 \in D_1$ *выполнялось неравенство*

$$|\Delta_n(x_1)| < \sup_{x \in D_1} \frac{N}{1 - \frac{2\pi N}{\sqrt{3}}} |x - x_1| + Na(m) \frac{q_m^n}{1 - q_m}. \tag{25}$$

Доказательство. Для $x_0,\ x_0' \in \widetilde{C}_{D-\delta a(m)}$ имеем

$$\| x_\infty(t, x_0) - x_\infty(t, x_0') \| \leqslant | x_0 - x_0' | + \left\| \int_0^t g(x_\infty(s, x_0), s) - g(x_\infty(s, x_0'), s) - \right.$$

$$\left. - P_0 g(x_\infty(s, x_0), s) + P_0 g(x_\infty(s, x_0'), s)]\, ds \right\| \leqslant | x_0 - x_0' | + 2\sigma(0) \| g(x_\infty(t, x_0), t) -$$

$$- g(x_\infty(t, x_0'), t) \| \leqslant | x_0 - x_0' | + 2\sigma(0) N \| x_\infty(t, x_0) - x_\infty(t, x_0') \|.$$

Отсюда

$$\| x_\infty(t, x_0) - x_\infty(t, x_0') \| \leqslant \frac{1}{1 - \frac{2\pi N}{\sqrt{3}}} | x_0 - x_0' |.$$

Из (21) получаем

$$\| \Delta(x_0) - \Delta(x_0') \| \leqslant N \| x_\infty(t, x_0) - x_\infty(t, x_0') \| \leqslant \frac{N}{1 - \frac{2\pi N}{\sqrt{3}}} | x_0 - x_0' |.$$

Из последнего неравенства и из (23) следует неравенство (25).

Имея необходимое условие того, чтобы $\Delta(x_0) = 0$, для отыскания начальных значений периодических решений, разбиваем множество $D - a(m)$ на конечное число подмножеств D_i. Вычисляем $\Delta_n(x^{(i)})$ для $x^{(i)} \in D_i$ и проверяем выполнимость условия (25).

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Cesari, Functional analisis and periodic solutions of non-linear differential equations, Contrb. Diff. Egs., 1, 1963, 149—187.
2. А. М. Самойленко, Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных диференциальных уравнений. I, УМЖ, т. 17, № 4, 1965.
3. А. М. Самойленко, Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. II, УМЖ, т. 18, № 2, 1966.
4. Н. С. Курпель, Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений, «Наукова думка», К., 1968.
5. И. П. Натансон, Конструктивная теория функций, ГИТТЛ, М.—Л., 1949.

Поступила 27.IX 1973 г.

Институт математики АН УССР