УДК 517.53

К теории аналитических функций с положительной вещественной частью в круге

В. А. Зморович, И. К. Коробкова

1. В теории специальных классов аналитических функций в круге E : $|z| < 1$ и круговой области $E_0 : 0 < |z| < 1$ большую роль играет класс P регулярных в E функций $p(z)$, $p(0) = 1$, удовлетворяющих в E условию $\operatorname{Re} p(z) > 0$, а также разные подклассы этого класса, как, например, $P(m)$ ($m \geqslant 1$, целое), объединяющий все те и только те функции класса P, которые определяются в E разложением вида

$$p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{mk}.$$

Очевидно, $P(1) = P$.

Для функций класса $P(m)$ справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если фиксировать точку $z_0 \in E$, то значения функций $p(z) \in P(m)$ в этой точке покрывают круг*

$$|w - a| \leqslant \rho, \tag{1}$$

где

$$a = \frac{1 + r^{2m}}{1 - r^{2m}}, \qquad \rho = \frac{2r^m}{1 - r^{2m}}, \quad |z_0| = r,$$

причем окружность этого круга покрывается значениями только функций вида

$$p(z) = \frac{1 + z^m e^{-i\theta_0}}{1 - z^m e^{-i\theta_0}}, \quad 0 \leqslant \theta_0 \leqslant 2\pi. \tag{2}$$

Если в точке $z_0 \in E$ фиксировать значение w_0 функции $w = p(z) \in P(m)$ в соответствии с (1) и заставить $p(z)$ пробегать тот подкласс $P(m, w_0)$ класса $P(m)$, все функции которого удовлетворяют условию $w_0 = p(z_0)$, то значения $\zeta = z_0 p'(z_0)$ покрывают круг

$$|\zeta - C(w_0)| \leqslant R(w_0), \tag{3}$$

где

$$C(w_0) = \frac{m}{2}(w_0^2 - 1), \quad R(w_0) = \frac{m}{2}(\rho^2 - |w_0 - a|^2),$$

причем окружность этого круга покрывается значениями только функций вида

$$p(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \frac{1 + z^m e^{-i\theta_k}}{1 - z^m e^{-i\theta_k}}, \tag{4}$$

где $\lambda_k \geqslant 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\theta_k \in [0, 2\pi]$, $k = 1, 2$; параметры λ_k, θ_k связаны условием $w_0 = p(z_0)$.

Доказательство этой теоремы основано на использовании интегрального представления функций класса $P(m)$, а также на исследованиях Каратеодори класса P [1]. Эта теорема впервые применена в работе [2], но первое подробное доказательство ее проведено в [3]. На основании этой теоремы решается большое число экстремальных задач, связанных с функционалами вида $\Phi(p(z), zp'(z))$, где $\Phi(w, \zeta)$ однозначна и непрерывна в области $B_{w,\zeta}: \operatorname{Re} w > 0$, $|\zeta| < +\infty$, $p(z)$ пробегает класс $P(m)$, а величина $r = |z|$ считается фиксированной, $r \in (0, 1)$. В данной статье на основании теоремы 1 устанавливается аналогичная теорема для класса $\widetilde{P}(m) \subset P$, функции которого характеризуются разложением вида

$$p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{m+k-1}.$$

Кроме того, теорема 1 используется в дальнейшем для доказательства теоремы 3.

2. Теорема 2. *Если фиксировать точку $z_0 \in E$, то значения функций $p(z) \in \widetilde{P}(m)$ в этой точке покрывают круг (1), причем окружность этого круга покрывается значениями только функций вида (2). Если в точке $z_0 \in E$ фиксировать значение w_0 функции $w = p(z) \in \widetilde{P}(m)$ в соответствии с (1) и заставить $p(z)$ пробегать тот подкласс $\widetilde{P}(m, w_0)$ класса $\widetilde{P}(m)$, все функции которого удовлетворяют условию $w_0 = p(z_0)$, то зна-*

чения $\zeta = z_0 p'(z_0)$ *покрывают круг*

$$|\zeta - C(w_0)| \leqslant R_1(w_0), \tag{5}$$

где

$$C(w_0) = \frac{m}{2}(w_0^2 - 1), \qquad R_1(w_0) = \lambda(r)(\rho^2 - |w_0 - a|^2),$$

$$\lambda(r) = \frac{1 - r^{2m}}{2r^{m-1}(1 - r^2)},$$

причем окружность этого круга покрывается значениями только функций вида

$$p(z) = \frac{1 + z^{m-1}\omega(z)}{1 - z^{m-1}\omega(z)}, \tag{6}$$

где $\omega(z) = ze^{-i\theta_0}\dfrac{c - z}{1 - \bar{c}z}$, $|c| < 1$, $\theta_0 \in [0, 2\pi]$; *параметры* c *и* θ_0 *связаны условием* $w_0 = p(z_0)$.

Доказательство. Обозначим через B_0 класс регулярных в E функций $\omega(z)$, $\omega(0) = 0$, удовлетворяющих условию $|\omega(z)| < 1$ в E. Тогда нетрудно убедиться, что формула (6), где $\omega(z)$ пробегает класс B_0, является структурной для класса $\widetilde{P}(m)$. С другой стороны, класс B_0 связан с классом P формулой

$$\omega(z) = \frac{q(z) - 1}{q(z) + 1}, \tag{7}$$

где $q(z) \in P$, $\omega(z) \in B_0$. Поэтому

$$zp'(z) = \frac{2(m-1)z^{m-1}\omega(z)}{[1 - z^{m-1}\omega(z)]^2} + \frac{4z^m q'(z)}{[q(z) + 1]^2 [1 - z^{m-1}\omega(z)]^2}. \tag{8}$$

Так как $q(z) \in P(1)$, то можно применить теорему 1, в силу которой

$$zq'(z) = \frac{1}{2}[q^2(z) - 1] + \frac{1}{2}[\rho_1^2 - |q(z) - a_1|^2]\,\varepsilon e^{i\psi_1}, \tag{9}$$

где

$$a_1 = \frac{1 + r^2}{1 - r^2}, \quad \rho_1 = \frac{2r}{1 - r^2}, \quad |z| = r, \quad |\varepsilon| \leqslant 1, \quad \psi_1 \in [0, 2\pi].$$

Величины ε и ψ_1 зависят от z и выбора функции $q(z) \in P$. Используя (9) после некоторых преобразований из (8) получаем

$$zp'(z) = \frac{m}{2}(w^2 - 1) + \lambda(r)[\rho^2 - |w - a|^2]\,\varepsilon e^{i\psi}, \tag{10}$$

$$\psi = \psi_1 + 2\arg[1 - \omega(z)] + (m - 1)z + 2\arg(1 + w).$$

Поскольку при фиксации в точке z значения $w = p(z)$ значение $q(z)$, как следует из (6) и (7), тоже фиксируется, то, когда $q(z)$ пробегает тот подкласс класса P, функции которого имеют в точке z нужное фиксированное значение, величина ε принимает все значения из $[0, 1]$, а ψ_1 — все значения из $[0, 2\pi]$, как следует из (9) и теоремы 1. Поэтому из (10) следует справедливость теоремы 2. Доказанная теорема 2, подобно теореме 1, дает возможность решить многие экстремальные задачи в специальных классах аналитических функций $f(z)$, регулярных в E или E_0 с разложениями вида

$$z + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{m+k-1} \text{ в первом случае и } \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{m+k-2}$$

во втором. Применения теоремы 2, как правило, сопряжены с более сложными выкладками и вспомогательными соображениями, чем применения теоремы 1. Несколько примеров таких применений указано в [4], где рассматривались функционалы вида

$$A(p(z)) + zB(p(z))\,p'(z),$$

$A(w)$ и $B(w)$ — однозначные аналитические в $\operatorname{Re} w > 0$.

3. Пусть $b \in (0, 1)$. Обозначим через $P(m, b)$ подкласс класса $P(m)$, функции которого удовлетворяют условию $|p'(0)| = 2b$. Через $B_0(m, b)$ обозначим подкласс класса B_0, о котором говорилось в п. 2, определяемый условием, что функции, входящие в этот подкласс, m-кратно симметричные и

$$\lim_{z\to 0}\left|\frac{\omega(z)}{z^m}\right| = b.$$

Легко убедиться, что между классами $B_0(m, b)$ и $B_0(m)$ существует зависимость, определяемая формулой

$$\omega(z) = z^m e^{i\gamma}\,\frac{b + \omega_1(z)}{1 + b\omega_1(z)}, \tag{11}$$

где $\omega_1(z) \in B_0(m)$, γ — произвольная вещественная постоянная, $\omega(z) \in B_0(m,b)$ Из (11), учитывая, что значения функций $\omega_1(z)$ в фиксированной точке $z_0 \in E$ заполняют круг $|\zeta| \leqslant |z|^m$ в E, получаем, что значения функций (11) в фиксированной точке $z_0 \in E$ заполняют кольцо

$$\varphi_0(r, b) \leqslant |w| \leqslant \varphi(r, b), \tag{12}$$

где

$$\varphi(r, b) = r^m\,\frac{b + r^m}{1 + br^m},$$

$$\varphi_0(r, b) = \begin{cases} r^m\,\dfrac{b - r^m}{1 - br^m} & \text{при } 0 < r < \sqrt[m]{b}, \\[2ex] 0 & \text{при } \sqrt[m]{b} < r < 1. \end{cases}$$

Поскольку между классами $P(m, b)$ и $B(m, b)$ существует взаимно однозначное соотношение

$$p(z) = \frac{1 + \omega(z)}{1 - \omega(z)}, \tag{13}$$

где $\omega(z) \in B(m, b)$, а $\zeta = p(z) \in P(m, b)$, то нетрудно проверить, что кольцу (12) соответствует кольцо, ограниченное окружностями

$$|\zeta - a(\sigma_j)| = \rho(\sigma_j),$$

где

$$a(\sigma) = \frac{1 + \sigma^{2m}}{1 - \sigma^{2m}}. \qquad \rho(\sigma) = \frac{2\sigma^m}{1 - \sigma^{2m}}, \qquad \sigma_1 = \varphi_0(r, b), \qquad \sigma_2 = \varphi(r, b).$$

На основании теоремы 1 в фиксированной точке $z_0 \in E$ имеем

$$z_0 p'(z_0) = \frac{m}{2}\,[p^2(z_0) - 1] + \frac{m}{2}\,[\rho^2 - |p(z_0) - a|^2]\,\varepsilon e^{i\psi},$$

где $a = a(r)$, $r = |z_0|$, $\rho = \rho(r)$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, причем ε и ψ зависят от z_0 и выбора функции $p(z)$ даже тогда, когда значение $p(z_0)$ фиксировано.

Полагая

$$|p(z_0) - a(\sigma)| = \rho(\sigma),$$

где $0 < \sigma < 2$, получаем

$$\rho^2 - |p(z_0) - a|^2 = 2[a - a(\sigma)] \operatorname{Re} p(z_0),$$

где

$$\frac{1-\sigma^m}{1+\sigma^m} \leqslant \operatorname{Re} p(z_0) \leqslant \frac{1+\sigma^m}{1-\sigma^m}.$$

Поэтому окончательно

$$z_0 p'(z_0) = \frac{m}{2}[w_0^2 - 1] + m(a - a(\sigma)) \operatorname{Re} w_0 \varepsilon e^{i\psi}.$$

Отсюда учитывая, что при фиксированном значении $w_0 = p(z_0)$, когда $p(z)$ пробегает соответствующий подкласс класса $P(m)$, величина ε пробегает все значения из $[0,1]$, а ψ — из $[0, 2\pi]$, получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Если $p(z) \in P(m, b)$ и значение $w_0 = p(z_0)$ в заданной точке $z_0 \in E$, $|z_0| = r$, фиксировано, то значения функции $zp'(z)$ в точке $z = z_0$, когда $p(z)$ пробегает соответствующий подкласс класса $P(m, b)$, покрывают кольцо, ограниченное окружностями Γ_j:*

$$|w - C(w_0)| = R_2(\sigma_j, w_0), \quad j = 1, 2,$$

где

$$C(w_0) = \frac{m}{2}(\bar{w}_0^2 - 1), \quad R_2(\sigma_j, w_0) = m(a - a(\sigma_j)) \operatorname{Re} w_0,$$

$$\sigma_1 = \varphi_0(r, b), \quad \sigma_2 = \varphi(r, b),$$

$$\frac{1-\sigma^m}{1+\sigma^m} \leqslant \operatorname{Re} w_0 \leqslant \frac{1+\sigma^m}{1-\sigma^m}, \qquad \sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2.$$

Экстремальные функции имеют вид (13), *где*

$$\omega(z) = z^m e^{i\gamma} \frac{b + z^m}{1 + bz^m},$$

γ — произвольная действительная постоянная.

Пользуясь теоремой 3 можно решать экстремальные задачи для ряда специальных классов аналитических функций с разложением вида

$$f(z) = z + c_1 z^{m+1} + c_2 z^{2m+1} + \ldots,$$

где $|c_1|$ фиксирован.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. C. Caratheodory, Uber den Variabilitatsbereich der Furierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen, Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, 32, 1911, 193—217.
2. В. А. Зморович, О границах выпуклости звездных функций порядка α в круге $z < 1$ и круговой области $0 < |z| < 1$, Матем. сб., 68 (110), № 4, 1965.
3. И. К. Коробкова, О некоторых методах и теоремах теории специальных классов аналитических функций, Автореферат канд. дисс., Ин-т математики АН УССР, 1971.
4. I. К. Коробкова, Про екстремальні задачі в деяких класах однолистих функцій з припусками початкових коефіцієнтів в їхніх степеневих розкладах, ДАН УРСР, сер. А, № 8, 1970.

Поступила 25. XII 1972 г.
Киевский политехнический институт