УДК 531.391

К вопросу о пространственной неустойчивости в системе плазма—пучок

Р. И. Ковтун

В работе [1] было показано, что неустойчивость в системе плазма—пучок может быть рассмотрена асимптотическим методом, позволяющим проследить за всеми стадиями развития неустойчивости и построить фазовую картину колебаний амплитуды. В частности, там приводится подробный анализ пространственной неустойчивости в одномерном случае: безграничный пучок и плазма, заполняющая полупространство $z > 0$.

В [1] также показано, что распределение амплитуды a потенциала волны φ в плазме описывается уравнением

$$A(\alpha)\frac{d^2a}{dz^2} + B(\alpha)\left(\frac{da}{dz}\right)^2 + \left\{\frac{C(\alpha)}{1+\alpha} - \theta(\alpha)\right\}a = 0. \tag{1}$$

Обозначения те же, что и в [1].

Исходя из [1], установлено, что начальное нарастание неустойчивости не может быть экспоненциальным и что величина $\frac{1}{a}\cdot\frac{da}{dz}$ при малых a пропорциональна a и при $a \to 0$ исчезает. Поэтому в линейном приближении пространственная неустойчивость отсутствует и для ее описания необходимо прибегать к асимптотическому методу с самого начала, т. е. при произвольно малых амплитудах волн. Поскольку этот вывод находится в противоречии с принятым в литературе мнением, стоит остановиться на нем подробнее и показать, что экспоненциальное нарастание малых амплитуд в данной системе противоречит не только выводам, основанным на уравнении (1), но и ряду известных и даже элементарных фактов из механики движения зарядов в электрических полях. Противоречит оно и самой линейной теории.

Рассмотрим сначала движение зарядов в продольной электростатической волне с постоянной амплитудой. В системе координат, связанной с волной, движение заряда потенциально и его скорость относительно волны равна

$$v = \left\{\left(V_0 - \frac{\omega}{k}\right)^2 - 2\frac{e}{m}\varphi\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

где $V_0 - \frac{\omega}{k}$ — скорость заряда относительно волны в точках, где $\varphi = 0$. В линейной теории продольная скорость заряда состоит из постоянной части V_0 и переменной компоненты, которая пропорциональна φ [2]. Из (2) следует, что такое приближение возможно только при условии, что

$$|ea| \ll m\left(V_0 - \frac{\omega}{k}\right)^2. \tag{3}$$

В той же линейной теории взаимодействия пучка и плазмы [2] выводится дисперсионное уравнение $D = 0$, или в явном виде

$$D(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2}{(\omega - \widetilde{k}V_0)^2} = 0, \quad \widetilde{k} = k + i\gamma. \tag{4}$$

При этом утверждается, что пространственная неустойчивость имеет место при вещественных ω и комплексных $\widetilde{k}$ ($\mathrm{Im}\widetilde{k} = \gamma \neq 0$), удовлетворяющих (4).

Решим (4) относительно $\widetilde{k}$:

$$\widetilde{k}=\frac{\omega}{V_0}+\frac{\omega_b}{V_0}\left\{1-\frac{\omega_r^2}{\omega^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

Видим, что $\widetilde{k}$ может быть комплексным только за счет второго члена справа при $\omega<\omega_r$. Но при этом $k=\mathrm{Re}\widetilde{k}=\frac{\omega}{V_0}$ или $V_0=\frac{\omega}{k}$, т. е. пучок оказывается неподвижным относительно волны в противоречии с условием (3). Правда, последнее получено для стационарных колебаний ($a=\mathrm{const}$), однако нетрудно показать, что в случае неустойчивости предположение о том, что $\gamma=\mathrm{Im}\widetilde{k}\neq 0$ приводит линейную теорию к внутреннему противоречию.

В самом деле, в линейном приближении все переменные величины пропорциональны $e^{i\psi}$, где $\psi=\omega t-kz$, причем $z=V_0t+\mathrm{const}$ где $V_0=\mathrm{const}$, так как возмущением продольной скорости в линейном приближении пренебрегают. Фактически это означает, что частота возмущения движения зарядов $\frac{d\psi}{dt}=\omega-kV$ мало отличается от приближенной величины $\omega-kV_0$, которая фигурирует в линейной теории. Но это допустимо лишь тогда, когда

$$|\omega-kV_0|\gg k|\nu|, \tag{6}$$

где ν — переменная часть продольной скорости заряда, равная в линейном приближении

$$\nu=\frac{ea}{m}\cdot\frac{\widetilde{k}}{\omega-\widetilde{k}V_0}e^{i\psi}. \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6), легко показать, что (6) эквивалентно условию

$$|ea|\ll m\left|\left(V_0-\frac{\omega}{k}\right)\sqrt{\left(V_0-\frac{\omega}{k}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{k}V_0\right)^2}\right|\cdot\left[1+\left(\frac{\gamma}{k}\right)^2\right]^{-1},$$

которое представляет собой обобщение (3) на случай $\gamma\neq 0$ и точно также свидетельствует, что в линейном приближении $|V_0-\frac{\omega}{k}|$ должно быть конечно. Однако последнее, как видно, возможно лишь при вещественном втором слагаемом в правой части (5), а это автоматически означает, что $\gamma=0$. Поэтому в действительности условием применимости линейной теории остается неравенство (3). Таким образом, пространственный инкремент γ, вычисляемый в линейной теории, может быть отличен от нуля только за пределами применимости линейной теории.

Далее необходимо остановиться на весьма распространенном в литературе определении γ как

$$\gamma=\frac{\partial\omega}{\partial k}\delta, \tag{8}$$

где $\delta=\mathrm{Im}\,\omega$, а $\frac{\partial\omega}{\partial k}$ — групповая скорость волны, вычисляемая с помощью (4). Доказательство формулы (8) в общем случае правильное, основано на предположении, что в некоторой точке плоскости $(\omega,\widetilde{k})$ дисперсионное уравнение $D(\omega,\widetilde{k})=0$ рассматриваемой системы удовлетворяется при вещественной ω вектором $\widetilde{k}=k+i\gamma$ и частотой $\omega+i\delta$ при вещественном $\widetilde{k}$, причем также предполагается, что $|\delta| \ll \omega$ и $|\gamma| \ll k$. Поэтому уравнения

$$D(\omega, k + i\gamma) = 0, \quad D(\omega + i\delta, k) = 0$$

записываются в виде разложений

$$D(\omega, k) + i\gamma \frac{\partial D(\omega, k)}{\partial k} = 0, \quad D(\omega, k) + i\delta \frac{\partial D(\omega, k)}{\partial \omega} = 0, \tag{9}$$

из которых следует (8). Однако при этом упускается из виду, что $\tilde{k}$ может быть комплексным только при $\omega - kV_0 = 0$, как это следует из (5). Но в этом случае $D(\omega, k)$, т. е. левая часть (4), терпит разрыв, точнее имеет полюс второго порядка, и разложения (9) оказываются незаконными. Во всех остальных точках плоскости $(\omega, \tilde{k})$ величина $\tilde{k}$ строго вещественна. Следовательно, для системы плазма — пучок формула (8) неприменима.

Этим еще раз подтверждается неэкспоненциальный ход пространственной неустойчивости в пределе малых амплитуд, который был установлен в [1] с помощью асимптотического метода.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Ю. А. Митропольскому и А. А. Рухадзе за обсуждение результатов работы и полезные указания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. И. Ковтун, Применение асимптотического метода к анализу нелинейного взаимодействия плазмы с пучками, УМЖ, т. 26, № 3, 1974.
2. R. I. Briggs, Electron stream interaction with plasmas, Massachusets Inst. of Technology, 1964.

Поступила 16.I 1974 г.
Институт радиотехники и электроники АН СССР