УДК 517.948.32

Об устойчивости краевой задачи Маркушевича

А. М. Николайчук

В работе [1] задача Маркушевича

$$\varphi^+(t) = a(t)\varphi^-(t) + b(t)\overline{\varphi^-(t)}, \quad \varphi^-(\infty) = 0, \quad |a(t)| > 0, \quad |t| = 1, \tag{1}$$

сводится к матричной задаче Римана:

$$\Phi^+(t) = \begin{pmatrix} \overline{a^{-1}(t)} & 0 \\ 0 & \overline{a^{-1}(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |a(t)|^2 - |b(t)|^2 & b(t) \\ -\overline{b(t)} & 1 \end{pmatrix} \Phi^-(t). \tag{2}$$

Задача (1) названа в [1] устойчивой, если задача Римана (2) имеет устойчивые частные индексы. Там же показано, что в эллиптическом случае [2, 3]

$$|a(t)| > |b(t)| \tag{3}$$

частные индексы матрицы

$$A(t) = \begin{pmatrix} |a(t)|^2 - |b(t)|^2 & b(t) \\ -\overline{b(t)} & 1 \end{pmatrix}$$

равны нулю, следовательно, задача (1) устойчива и имеет $l = \max(0, 2\varkappa)$ линейно независимых исчезающих на бесконечности решений, где $\varkappa = \operatorname{Ind} a(t)$.

В данной заметке указывается достаточное условие устойчивости задачи (1), обобщающее условие (3).

Матрицу $A(t)$ представим в виде

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & f(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\overline{f(t)} & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$B(t) = \begin{pmatrix} |a(t)|^2 - |b(t) - f(t)|^2 & b(t) - f(t) \\ -\overline{b(t)} + \overline{f(t)} & 1 \end{pmatrix}$$

и $f(t)$ — предельное значение функции, аналитической внутри круга. Пусть

$$X^+(t) \begin{pmatrix} t^{\varkappa_1} & 0 \\ 0 & t^{\varkappa_2} \end{pmatrix} = B(t) X^-(t) \tag{4}$$

— левая стандартная факторизация [4] матрицы $B(t)$. Тогда

$$\Psi^+(t) \begin{pmatrix} t^{\varkappa_1} & 0 \\ 0 & t^{\varkappa_2} \end{pmatrix} = A(t) \Psi^-(t)$$

— факторизация матрицы $A(t)$, где

$$\Psi^+(t) = \begin{pmatrix} 1 & f(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X^+(t) \quad \text{и} \quad \Psi^-(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \overline{f(t)} & 1 \end{pmatrix} X^-(t).$$

Отсюда следует, что системы частных индексов матриц $A(t)$ и $B(t)$ совпадают. Перепишем (4) в виде

$$\begin{pmatrix} X_{1i}^+(t) \\ X_{2i}^+(t) \end{pmatrix} t^{\varkappa_i} = B(t) \begin{pmatrix} X_{1i}^-(t) \\ X_{2i}^-(t) \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2). \tag{5}$$

Умножая обе части (5) слева на вектор $(\overline{X_{1i}^-(t)}, \overline{X_{2i}^-(t)})$, получим

$$\overline{(X_{1i}^{-}(t)} \cdot X_1^{+}(t) + \overline{X_{2i}^{-}(t)} \cdot X_{2i}^{+}(t))\, t^{\varkappa_i} = (|a(t)|^2 - |b(t) - f(t)|^2)\, X_{1i}^{-}(t)\, \overline{X_{1i}^{-}(t)} +$$

$$+ X_{2i}^{-}(t)\, \overline{X_{2i}^{-}(t)} + (b(t) - f(t))\, X_{2i}^{-}(t)\, \overline{X_{1i}^{-}(t)} + (-\overline{b(t)} + \overline{f(t)})\, X_{1i}^{-}(t)\, \overline{X_{2i}^{-}(t)}. \quad (6)$$

Пусть выполняется условие: $|a(t)| > |b(t) - f(t)|$. Тогда при всех t значения функции в правой части (6) лежат в правой полуплоскости, так как по свойству канонических решений $X_{1i}^{-}(t)$ и $X_{2i}^{-}(t)$ не обращаются одновременно в нуль ни в одной точке. Отсюда следует, что индекс правой части (6) равен нулю. Слева в (6) скобка представляет собой предельное значение функции, аналитической внутри круга, поэтому ее индекс неотрицателен. Отсюда заключаем, что

$$\varkappa_i \leqslant 0 \quad (i = 1, 2). \quad (7)$$

Поскольку $\varkappa_1 + \varkappa_2 = \operatorname{Ind} \det B(t) = 0$, из (7) следует, что $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема. *Если существует аналитическая внутри круга функция $f(z)$ такая, что всюду на окружности*

$$|a(t)| > |b(t) - f(t)|,$$

то краевая задача (1) *устойчива и* $l = \max(0, 2\varkappa)$.

Замечание. В случае, когда $f(z) = z_0 = \mathrm{const}$, теорема допускает простую геометрическую интерпретацию: задача (1) устойчива, если существует на плоскости точка z_0 такая, что для любого фиксированного t_1 ($|t_1| = 1$) значение $b(t_1)$ попадает внутрь круга с центром z_0 и радиусом $|a(t_1)|$. При $z_0 = 0$ получаем эллиптический случай (3).

Автор искренне благодарит Г. С. Литвинчука за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. С. Литвинчук, Две теоремы об устойчивости частных индексов краевой задачи Римана и их приложение, Изв. вузов, Математика, № 12, 1967.
2. Б. В. Боярский, Об обобщенной граничной задаче Гильберта, Сообщ. АН ГрузССР, т. 25, № 4, 1960.
3. Л. Г. Михайлов, Об одной граничной задаче линейного сопряжения, ДАН СССР, т. 139, № 2, 1961.
4. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН, т. 13, № 2, 1958.

Поступила 29.XI 1972 г.

Одесский государственный университет