УДК 517.54

Об одной экстремальной задаче конформного отображения единичного круга на неналегающие области

Г. П. Бахтина

В работе решается следующая экстремальная задача.

Пусть $\mathfrak{M} = \{(f_1, f_2)\}$ — множество всевозможных пар функций $f_1(z)$, $f_2(z)$, регулярных в круге $|z| < 1$ и однолистно отображающих его на неналегающие друг на друга области B_1, B_2 так, что $f_k(0) = a_k$, $k = 1,2$, где a_1, a_2 — любые заданные конечные и различные между собой точки. Требуется найти максимум функционала $J = |f_1'(0)| + |f_2'(0)|$ на классе $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \cup \{(f_1, a_2)\} \cup \{(a_1, f_2)\} \cup (a_1, a_2)$, где $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — регулярные и однолистные в круге $|z| < 1$ функции такие, что $f_1(z) \neq a_2$, $f_2(z) \neq a_1$ при всех $z \in |z| < 1$ и $f_k(0) = a_k$, $k = 1, 2$ (a_1, a_2 — точки, указанные в определении множества $\mathfrak{M}$).

Теорема. *На классе $\mathfrak{F}$ справедливо соотношение*

$$J \leqslant 4\,|a_1 - a_2|. \tag{1}$$

Знак равенства в (1) *имеет место для пар* (f_1^0, a_2) и (a_1, f_2^0) *функций* $w = f_1^0(z)$, $w = a_2 = \mathrm{const}$ *и* $w = a_1 = \mathrm{const}$, $w = f_2^0(z)$, *где функции* $w = f_1^0(z)$ *и* $w = f_2^0(z)$ *регулярны в круге* $|z| < 1$ *и однолистно отображают его на плоскость с разрезом, идущим соответственно от точек* a_2 *и* a_1 *до бесконечности вдоль прямой, проходящей через точки* a_1 *и* a_2, *и только для этих пар.*

Доказательство. Пользуясь теоремой Кебе, получим $|f_k'(0)| \leqslant 4\,|a_1 - a_2|$, $k = 1, 2$. Значит, сумма $J = |f_1'(0)| + |f_2'(0)|$ ограничена независимо от вида функций $f_k(z)$, $k = 1, 2$. Тогда существование пары экстремальных функций следует из компактности в себе класса $\mathfrak{F}$. Можно проверить, что вариационные формулы Г. М. Голузина [1, формулы (5), (6)] применимы к классу $\mathfrak{F}$.

Пусть (f_1, f_2) — пара экстремальных функций $w = f_k(z)$, $k = 1, 2$, B_1, B_2 — соответствующие экстремальные области. Доказывается (аналогично [1]), что область $\overline{B}_1 + \overline{B}_2$ не имеет внешних точек.

По функциям $w = f_k(z)$, $k = 1, 2$, пользуясь вариационными формулами Г. М. Голузина [1], построим варьированные функции $w^* = f_k^*(z)$, $k = 1, 2$, и вычислим функционал

$$J^* = \sum_{k=1}^{2} |f_k'(0)| + \mathrm{Re}\left[h \left(\sum_{k=1}^{2} |f_k'(0)| \frac{\prod\limits_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k}}^{2} (a_k - a_\nu)}{\prod\limits_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k_0}}^{2} (a_k - f_\nu(z_\nu))} + \right.\right.$$

$$+\sum_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{2}\frac{|f_k'(0)|}{z_k^2(f_k'(z_k))^2}\prod_{\nu=1}^{2}(f_k'(z_k)-a_\nu)\Bigg)\Bigg]+O(|h|^2). \qquad (2)$$

В силу произвольности $\arg h$ и экстремальности функций $w=f_k(z)$, $k=1,2$, получаем, что

$$\sum_{k=1}^{2}|f_k'(0)|\frac{\prod\limits_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k}}^{2}(a_k-a_\nu)}{\prod\limits_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k_0}}^{2}(a_k-f_\nu(z_\nu))}+\sum_{k=1}^{2}\frac{|f_k'(0)|}{z_k^2(f_k'(z_k))^2}\prod_{\nu=1}^{2}(f_k(z_k)-a_\nu)=0 \qquad (3)$$

при любом выборе точек $z_k\in|z|<1$ и любом $k_0=1,2$. Можно показать, что функции $f_k(z)$, $k=1,2$, кусочно-аналитичны на окружности $|z|=1$.

Предположим сначала, что $|f_1'(0)|\neq 0$, $|f_2'(0)|\neq 0$ и $|f_1'(0)|\neq|f_2'(0)|$. Тогда уравнение (3) при $k_0=1,2$ дает дифференциальные уравнения для экстремальных функций

$$\frac{a_1-a_2}{a_1-w}+\tau\frac{a_2-a_1}{a_2-w}+\frac{(w-a_1)(w-a_2)}{z^2w'^2}=0\left(w=f_1(z),\quad \tau=\frac{|f_2'(0)|}{|f_1'(0)|}\right),$$

$$\sigma\frac{a_1-a_2}{a_1-w}+\frac{a_2-a_1}{a_2-w}+\frac{(w-a_1)(w-a_2)}{z^2w'^2}=0\left(w=f_2(z),\ \sigma=\frac{1}{\tau}\right).$$

Проинтегрировав эти уравнения и определив произвольные постоянные, найдем, что экстремальные функции удовлетворяют неявным уравнениям

$$\frac{e^{i\alpha_1}}{z}=\frac{\sqrt{w^*}+\sqrt{a}}{\sqrt{w^*}-\sqrt{a}}\left(\frac{\sqrt{w^*}-\sqrt{a\tau}}{\sqrt{w^*}+\sqrt{a\tau}}\right)^{\sqrt{\tau}}, \qquad (4)$$

где $w^*=(f_1(z)-a_2)(1-\tau)+\tau(a_1-a_2)$, $a=a_1-a_2$, α_1 — вещественное;

$$\frac{e^{i\alpha_2}}{z}=\frac{\sqrt{w^{**}}+\sqrt{a}}{\sqrt{w^{**}}-\sqrt{a}}\left(\frac{\sqrt{w^{**}}-\sqrt{a\sigma}}{\sqrt{w^{**}}+\sqrt{a\sigma}}\right)^{\sqrt{\sigma}}, \qquad (5)$$

где $w^{**}=(f_2(z)-a_2)(\sigma-1)+(a_1-a_2)$, α_2 — вещественное. Под $\sqrt{w^*}$ и $\sqrt{w^{**}}$ понимаем те ветви функций, для которых при $z=0$ выражения $\sqrt{w^*}-\sqrt{a}$ и $\sqrt{w^{**}}-\sqrt{a}$ равны нулю (ср. с [2]).

Пусть параметр τ произвольно меняется в интервале $(0,1)$. Пользуясь уравнениями (4) и (5), вычислим функционал:

$$J(\tau)=\frac{4|a_1-a_2|}{1-\tau}\left[\left(\frac{1-\sqrt{\tau}}{1+\sqrt{\tau}}\right)^{\sqrt{\tau}}+\tau\left(\frac{1-\sqrt{\tau}}{1+\sqrt{\tau}}\right)^{\sqrt{\frac{1}{\tau}}}\right].$$

Таким образом, применение вариационного метода позволяет свести первоначальную задачу к такой задаче о максимуме функционала, которую можно решить элементарными методами. Изучая поведение функционала в зависимости от изменения параметра τ, получаем, что наибольшее значение, равное $4|a_1-a_2|$, функционал принимает при $\tau=0$. В этом случае функция $w=f_2(z)=a_2=\mathrm{const}$, а функция $w=f_1(z)=a_1+\frac{4e^{i\alpha_1}(a_1-a_2)z}{(e^{i\alpha_1}-z)^2}$

отображает круг $|z| < 1$ на плоскость с разрезом, идущим из точки a_2 в бесконечность вдоль прямой, проходящей через точки a_1 и a_2.

Так как параметры τ и σ равноправны, то, предположив, что параметр σ изменяется в интервале $(0, 1)$ и проводя исследование функционала в зависимости от изменения параметра σ, получим, что экстремальной является пара функций $w = f_1(z) = a_1 = \text{const}$ и $w = f_2(z)$, где $f_2(z) = a_2 - \dfrac{4e^{i\alpha_2}(a_1 - a_2)z}{(e^{i\alpha_2} - z)^2}$ — функция, отображающая круг $|z| < 1$ на плоскость с разрезом, идущим из точки a_1 в бесконечно удаленную точку вдоль прямой, проходящей через точки a_1 и a_2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. М. Голузин, Метод вариаций в конформном отображении. IV. Матем. сб., т. 29 (71), № 2, 1951.
2. Л. И. Колбина, Некоторые экстремальные задачи в конформном отображении, ДАН СССР, т. 84, № 5, 1952.

Поступила 26.XII 1973 г.

Институт математики АН УССР