УДК 531.382

Об уравнениях гиростата в параметрах Родрига—Гамильтона

В. Н. Кошляков

В данной статье развиваются и уточняются результаты, изложенные в работах [1, 2]. На примере гиростата рассматривается вопрос об условиях, обеспечивающих наличие определенного класса точных решений (в конечных углах) невозмущаемой гиромаятниковой системы. В качестве аналитического аппарата используются параметры Родрига—Гамильтона.

1. Как известно, гиростатом называется механическая система S, состоящая из некоторого тела S_1 и системы тел S_2, не связанных неизменно с с телом S_1, причем движение тел S_2 относительно тела S_1 не изменяет геометрию масс системы S [3].

Допустим, что тело S_1 имеет неподвижную точку O, в которой расположены начала трех ортогональных трехгранников: 1) трехгранника $O\xi^*\eta^*\zeta^*$, не изменяющего своей ориентации относительно трехгранника $O^*\xi_a^*\eta_a^*\zeta_a^*$ с началом в центре Земного шара, оси которого направлены на неподвижные звезды; 2) трехгранника $O\xi\eta\zeta$, в котором ось ξ направлена по вектору $\mathbf{V}$ скорости точки O относительно «абсолютного» трехгранника $O^*\xi_a^*\eta_a^*\zeta_a^*$, причем оси ξ, η лежат в плоскости, касательной к Земной сфере в точке O; 3) трехгранника $Oxyz$, жестко связанного с телом S_1, оси которого совпадают с направлением главных осей инерции гиростата в точке O.

Общий кинетический момент гиростата относительно точки O представится в виде суммы $\boldsymbol{K} + \boldsymbol{k}$, где $\boldsymbol{K}$ — кинетический момент системы S, рассматриваемой как одно твердое тело, $\boldsymbol{k}$ — кинетический момент относительного движения тел S_2.

Полагая, что центр масс гиростата лежит на отрицательной оси z на расстоянии l от точки опоры и используя теорему о кинетическом моменте, получаем следующие уравнения движения тяжелого гиростата с одной неподвижной точкой [3]:

$$
\begin{gathered}
I_x \frac{d\omega_x}{dt} + \frac{dk_x}{dt} + (I_z - I_y)\,\omega_y\omega_z + \omega_y k_z - \omega_z k_y = M_x, \\
I_y \frac{d\omega_y}{dt} + \frac{dk_y}{dt} + (I_x - I_z)\,\omega_z\omega_x + \omega_z k_x - \omega_x k_z = M_y, \qquad (1.1) \\
I_z \frac{d\omega_z}{dt} + \frac{dk_z}{dt} + (I_y - I_x)\,\omega_x\omega_y + \omega_x k_y - \omega_y k_x = M_z,
\end{gathered}
$$

где моменты M_x, M_y, M_z, составленные с учетом произвольного движения точки подвеса по поверхности Земной сферы, имеют вид [1, 2]

$$
\begin{aligned}
M_x &= -\left(P_0 - m\frac{V^2}{R}\right) l a_{23} - mV\Omega l a_{22} - ml\frac{dV}{dt}\,a_{21} + M_x^*, \\
M_y &= \left(P_0 - m\frac{V^2}{R}\right) l a_{13} + mV\Omega l a_{12} + ml\frac{dV}{dt}\,a_{11} + M_y^*, \qquad (1.2) \\
M_z &= M_z^*.
\end{aligned}
$$

В уравнениях (1.1): I_x, I_y, I_z — главные моменты инерции гиростата для точки O; P_0 — сила тяготения к центру Земли, m — масса гиростата, R—радиус Земной сферы; Ω — проекция на ось ζ угловой скорости трехгранника $O\xi\eta\zeta$ относительно трехгранника $O^*\xi_a^*\eta_a^*\zeta_a^*$; a_{ij} — направляющие косинусы между осями ξ, η, ζ и x, y, z; M_x^*, M_y^*, M_z^* — моменты сторонних сил, действующих на гиростат помимо тяготения и инерции.

Для полного описания поведения гиростата на подвижном относительно Земли основании следует, вообще говоря, к уравнениям (1.1) присоединить динамические уравнения относительного движения системы носимых тел S_2. Надобность в этих уравнениях отпадает, если заранее известен вектор $\boldsymbol{k}$, т. е. проекции k_x, k_y, k_z являются заданными функциями времени.

Предположим теперь, что $k_z \equiv 0$, а k_x и k_y, с учетом информации о скоростях ω_x и ω_y, формируются по законам:

$$
k_x = (mlR - I_x)\,\omega_x, \qquad k_y = (mlR - I_y)\,\omega_y. \qquad (1.3)
$$

Подставляя эти значения в уравнения (1.1), получаем их в виде

$$
mlR\left(\frac{d\omega_x}{dt} - \mu\omega_y\omega_z\right) = M_x, \quad mlR\left(\frac{d\omega_y}{dt} + \mu\omega_z\omega_x\right) = M_y, \quad I_z\frac{d\omega_z}{dt} = M_z^*, \qquad (1.4)
$$

где

$$
\mu = 1 - \frac{I_z}{mlR}. \qquad (1.5)
$$

Считая далее момент инерции I_z пренебрежимо малым в сравнении с mlR и полагая $M_x^* = M_y^* = 0$, имеем уравнения вида

$$
\begin{gathered}
\dot\omega_x - \omega_y\omega_z + (\nu^2 - \Omega_1^2)\,a_{23} + \Omega\Omega_1 a_{22} + \dot\Omega_1 a_{21} = 0, \\
\dot\omega_y + \omega_z\omega_x - (\nu^2 - \Omega_1^2)\,a_{13} - \Omega\Omega_1 a_{12} - \dot\Omega_1 a_{11} = 0, \qquad (1.6) \\
I_z\omega_z = M_z^*,
\end{gathered}
$$

где положено

$$\nu = \sqrt{g_0/R}, \quad \Omega_1 = \frac{V}{R}, \tag{1.7}$$

причем g_0 — ускорение тяготения к центру Земной сферы.

Допустим, что момент M_z^*, приложенный к телу S_1, сформирован в соответствии с условием

$$\omega_z = \Omega. \tag{1.8}$$

Полагаем, таким образом, что с помощью каких-либо сторонних средств, учитывающих поступление внешней информации, тело S_1 вращается относительно оси z с угловой скоростью Ω. По существу, это эквивалентно выбору определенной вращающейся системы координат, в которой и рассматривается движение системы.

С учетом условия (1.8) уравнения (1.6) принимают вид

$$\begin{gathered} \dot{\omega}_x - \omega_y\Omega + (\nu^2 - \Omega_1^2)\, a_{23} + \Omega\Omega_1 a_{22} + \dot{\Omega}_1 a_{21} = 0, \\ \dot{\omega}_y + \omega_x\Omega - (\nu^2 - \Omega_1^2)\, a_{13} - \Omega\Omega_1 a_{12} - \dot{\Omega}_1 a_{11} = 0. \end{gathered} \tag{1.9}$$

В этих уравнениях под ω_x и ω_y можно понимать проекции угловой скорости системы уже на оси некоторого трехгранника, вращающегося вокруг оси z с заданной угловой скоростью $\omega_z = \Omega$ [4].

Уравнения (1.8) и (1.9) положим в основу дальнейшего исследования.

2. Введем параметры Родрига—Гамильтона λ_s, определив их следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}, \\ \lambda_1 &= \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}, \\ \lambda_2 &= \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}, \\ \lambda_3 &= \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь α, β, γ — углы Эйлера—Крылова, определяющие ориентацию трехгранника $Oxyz$ относительно $O\xi\eta\zeta$ и выбираемые так, как это принято в теории гирокомпасов [1, 2].

В переменных λ_s уравнения (1.9) принимают вид

$$\begin{gathered} \lambda_0\Lambda_1 + \lambda_3\Lambda_2 - \lambda_1\Lambda_0 - \lambda_2\Lambda_3 = 0, \\ \lambda_0\Lambda_2 - \lambda_3\Lambda_1 - \lambda_2\Lambda_0 + \lambda_1\Lambda_3 = 0, \end{gathered} \tag{2.2}$$

где через Λ_s ($s = 0, 1, 2, 3$) обозначены дифференциальные комбинации вида

$$\begin{gathered} \Lambda_0 = \ddot{\lambda}_0 - \frac{d}{dt}(\Omega_1\lambda_2), \quad \Lambda_3 = \ddot{\lambda}_3 - \frac{d}{dt}(\Omega_1\lambda_1), \\ \Lambda_1 = \ddot{\lambda}_1 + \Omega_1\dot{\lambda}_3 + (\nu^2 - \Omega^2 - \Omega_1^2)\,\lambda_1 - 2\Omega\dot{\lambda}_2 - \dot{\Omega}\lambda_2, \\ \Lambda_2 = \ddot{\lambda}_2 + \Omega_1\dot{\lambda}_0 + (\nu^2 - \Omega^2 - \Omega_1^2)\,\lambda_2 + 2\Omega\dot{\lambda}_1 + \dot{\Omega}\lambda_1. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Условие (1.8), выписанное в функциях параметров λ_s, представляется в форме

$$2\left[\lambda_0\dot{\lambda}_3-\lambda_3\dot{\lambda}_0+\lambda_2\dot{\lambda}_1-\lambda_1\dot{\lambda}_2+\Omega_1(\lambda_2\lambda_3-\lambda_0\lambda_1)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\Omega(\lambda_0^2+\lambda_3^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2)\right]=\Omega. \qquad (2.4)$$

3. Рассмотрим решения системы (2.2), удовлетворяющие условиям

$$\Lambda_s=0, \qquad (3.1)$$

что, в свою очередь, приводит к уравнениям вида

$$\ddot{\lambda}_1+\Omega_1\dot{\lambda}_3+(\nu^2-\Omega^2-\Omega_1^2)\lambda_1-2\Omega\dot{\lambda}_2-\dot{\Omega}\lambda_2=0,$$
$$\ddot{\lambda}_2+\Omega_1\dot{\lambda}_0+(\nu^2-\Omega^2-\Omega_1^2)\lambda_2+2\Omega\dot{\lambda}_1+\dot{\Omega}\lambda_1=0, \qquad (3.2)$$
$$\ddot{\lambda}_0-\frac{d}{dt}(\Omega_1\lambda_2)=0, \quad \ddot{\lambda}_3-\frac{d}{dt}(\Omega_1\lambda_1)=0.$$

Система (2.2), помимо решений $\Lambda_s=0$, может иметь бесчисленное множество и других решений; последние здесь не рассматриваются. Из двух последних уравнений (3.2) получаем

$$\dot{\lambda}_0=\Omega_1\lambda_2+C_2', \quad \dot{\lambda}_3=\Omega_1\lambda_1+C_1', \qquad (3.3)$$

где C_1' и C_2' — произвольные постоянные интегрирования. Во избежание появления секулярных членов в λ_0 и λ_3 примем далее, что

$$C_1'=C_2'=0, \qquad (3.4)$$

что можно обеспечить путем надлежащего выбора начальных условий [1, 2].

Преобразуя первые два уравнения системы (3.2) с помощью неособенной подстановки

$$\xi_1=\lambda_1\cos\theta-\lambda_2\sin\theta, \qquad \xi_2=\lambda_1\sin\theta+\lambda_2\cos\theta, \qquad (3.5)$$

где

$$\theta=\int_0^t\Omega(\tau)\,d\tau, \qquad (3.6)$$

и учитывая выражения (3.3), приходим к уравнениям

$$\ddot{\xi}_1+\nu^2\xi_1=0, \quad \ddot{\xi}_2+\nu^2\xi_2=0. \qquad (3.7)$$

Отсюда имеем

$$\xi_1=A_1\cos\nu t+B_1\sin\nu t, \quad \xi_2=A_2\cos\nu t+B_2\sin\nu t, \qquad (3.8)$$

где A_s и B_s — постоянные интегрирования.

Пользуясь уравнениями (3.3), имеем далее

$$\lambda_0=\int\Omega_1(t)\lambda_2(t)\,dt+E_0, \quad \lambda_3=\int\Omega_1(t)\lambda_1(t)\,dt+E_3, \qquad (3.9)$$

где E_0 и E_3 — также постоянные интегрирования.

4. Построенные выше решения следует проверить на предмет их соответствия условию (1.8), а также условию нормировки:

$$\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=1. \qquad (4.1)$$

Выполнение условия (1.8) в предположении соблюдения условия (4.1) приводит, как это показано в работе [2], к необходимости выполнения зависимости

$$B_1A_2 = A_1B_2, \tag{4.2}$$

налагающей определенные ограничения на начальные условия в (3.7). Что касается условия (4.1), то более удобно проверять выполнение условия

$$\lambda_0\dot{\lambda}_0 + \lambda_1\dot{\lambda}_1 + \lambda_2\dot{\lambda}_2 + \lambda_3\dot{\lambda}_3 = 0 \tag{4.3}$$

для любого t, считая, конечно, что в начальный момент условие (4.1) выполняется.

С учетом (3.4) и (4.2) выражение (4.3) приводится к виду

$$\begin{gathered}\xi_1\{\Omega_1[(E_3+I_1)\cos\theta-(E_0-I_1')\sin\theta]+\dot{\xi}_1\}+\\+\xi_2\{\Omega_1[(E_3+I_2')\sin\theta+(E_0+I_2)\cos\theta]+\dot{\xi}_2\}=0,\end{gathered} \tag{4.4}$$

где

$$\begin{aligned}I_1&=\int\xi_1(t)\,\Omega_1(t)\cos\theta(t)\,dt, &\quad I_1'&=\int\xi_1(t)\,\Omega_1(t)\sin\theta(t)\,dt,\\ I_2&=\int\xi_2(t)\,\Omega_1(t)\cos\theta(t)\,dt, &\quad I_2'&=\int\xi_2(t)\,\Omega_1(t)\sin\theta(t)\,dt.\end{aligned} \tag{4.5}$$

При постоянных V и Ω имеем уравнение (4.4) в форме

$$\begin{gathered}\xi_1\left[\Omega_1(E_3\cos\Omega t-E_0\sin\Omega t)+\left(1-\frac{\Omega_1^2}{\nu^2-\Omega^2}\right)\dot{\xi}_1\right]+\\+\xi_2\left[\Omega_1(E_3\sin\Omega t+E_0\cos\Omega t)+\left(1-\frac{\Omega_1^2}{\nu^2-\Omega^2}\right)\dot{\xi}_2\right]=0.\end{gathered} \tag{4.6}$$

При произвольном t и отличных от нуля коэффициентах A_s и B_s условию (4.6) можем удовлетворить единственным образом, полагая

$$E_0 = E_3 = 0, \qquad \nu^2-\Omega^2-\Omega_1^2 = 0. \tag{4.7}$$

Последнее из полученных условий налагает существенные ограничения на характер движения точки подвеса по Земной сфере, вопреки утверждению, содержащемуся в аннотации к статье [1], где говорилось о построении определенного класса точных решений задачи при произвольном движении точки подвеса по Земной сфере.

5. В случаях, когда V и Ω являются переменными функциями t, построение рассматриваемого класса решений значительно усложняется.

Можно, однако, указать на определенный путь решения этого вопроса, состоящий в дальнейшем преобразовании условия (4.4). Обращаясь к этому условию, рассмотрим частный случай, когда

$$\xi_1(t)=\xi_2(t)=\xi(t), \qquad E_0=E_3=0 \tag{5.1}$$

и соответственно положим в (3.8)

$$A_1=A_2=A, \qquad B_1=B_2=B. \tag{5.2}$$

Условие (4.4) примет вид

$$\xi(t)\,[\Omega_1(I\cos\theta+I'\sin\theta)+\dot{\xi}]=0, \tag{5.3}$$

где

$$I=\int\xi(t)\,\Omega_1(t)\cos\theta(t)\,dt, \qquad I'=\int\xi(t)\,\Omega_1(t)\sin\theta(t)\,dt. \tag{5.4}$$

Случай $\Omega_1 \equiv 0$ исключим из рассмотрения, так как в этом случае условие (4.4) обращается в нуль при всех t лишь при равных нулю коэффициентах A_s и B_s.

Считая, что A и B не обращаются в нули, уравнению (5.3) удовлетворяем, полагая

$$\Omega_1 (I \cos\theta + I' \sin\theta) = -\dot{\xi}. \tag{5.5}$$

Дифференцируя (5.5), имеем с учетом (5.4) и (3.6):

$$-\dot{\Omega}_1 \frac{\dot{\xi}}{\Omega_1} + \Omega_1^2 \xi - \Omega\Omega_1 (I \sin\theta - I' \cos\theta) = -\ddot{\xi}. \tag{5.6}$$

Из (5.5) и (5.6) получаем

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\Omega\Omega_1}\left(\ddot{\xi} + \Omega_1^2\xi - \frac{\dot{\Omega}_1}{\Omega}\dot{\xi}\right)\sin\theta - \frac{\dot{\xi}}{\Omega_1}\cos\theta,\\ I' &= -\frac{1}{\Omega\Omega_1}\left(\ddot{\xi} + \Omega_1^2\xi - \frac{\dot{\Omega}_1}{\Omega}\dot{\xi}\right)\cos\theta - \frac{\dot{\xi}}{\Omega_1}\sin\theta. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Далее будем считать, что Ω также не обращаются в нуль. Дифференцируя еще раз условие (5.6), имеем

$$\begin{aligned} &-\ddot{\Omega}_1\dot{\xi} + 3\Omega_1^2\dot{\Omega}_1\xi + \Omega_1^3\dot{\xi} - (\dot{\Omega}\Omega_1^2 + 2\Omega\Omega_1\dot{\Omega}_1) \times \\ &\times (I \sin\theta - I' \cos\theta) - \Omega^2\Omega_1^2 (I\cos\theta + I'\sin\theta) = -\dddot{\xi}\,\Omega_1. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Учитывая формулы (5.3), (5.6), а также соотношения

$$\ddot{\xi} = -\nu^2\xi, \quad \dddot{\xi} = -\nu^2\dot{\xi}, \tag{5.9}$$

приводим уравнение (5.8) к виду

$$\begin{aligned} &\dot{\xi}\left[\Omega_1(\Omega_1^2 + \Omega^2 - \nu^2) - \ddot{\Omega}_1 + \frac{\dot{\Omega}\dot{\Omega}_1}{\Omega} + 2\frac{\dot{\Omega}_1^2}{\Omega}\right] + \\ &+ \xi\left[\Omega_1^2\dot{\Omega}_1 - \frac{\dot{\Omega}\Omega_1^3}{\Omega} + \frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\Omega_1\nu^2 + 2\dot{\Omega}_1\nu^2\right] = 0. \end{aligned} \tag{5.10}$$

В случае, когда по условиям задачи можно считать $\Omega = 0$, уравнением (5.10) пользоваться нельзя. В этом случае из (5.4) и (5.5) с учетом (5.9) имеем

$$\dot{\Omega}_1 \frac{\dot{\xi}}{\Omega_1} + (\nu^2 - \Omega_1^2)\xi = 0. \tag{5.11}$$

Если $\Omega_1 \equiv \mathrm{const}$, то отсюда немедленно получаем условие $\Omega_1 = \nu$, вытекающее и из (4.7). Когда же Ω_1 является переменной функцией t, надлежит интегрировать несложное уравнение первого порядка (5.11).

Полагая для простоты $A = B$, из (5.11) имеем необходимый закон изменения Ω_1:

$$\Omega_1(t) = \frac{\nu\Omega_1(0)}{\sqrt{\nu^2 - \Omega_1^2(0)\sin 2\nu t}}(\cos\nu t - \sin\nu t) \qquad (\Omega_1(0) < \nu). \tag{5.12}$$

Обращаясь теперь к уравнению (5.10), рассмотрим случай, когда Ω_1 является постоянной величиной, а Ω — переменной. В этом случае названное уравнение получает вид

$$\frac{k^2 d\Omega}{\Omega\,(k^2-\Omega^2)}=\frac{\dot{\xi}}{\xi}\,dt, \tag{5.13}$$

где

$$k^2=\nu^2-\Omega_1^2, \tag{5.14}$$

и интегрируется аналогично уравнению (5.11).

В общем случае путем последовательного дифференцирования соотношения (4.4) можно добиться исключения интегралов (4.5), что приведет к некоторому дифференциальному уравнению относительно Ω_1, решения которого будут принадлежать рассматриваемому классу.

Исследование этого уравнения может служить предметом специального исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Кошляков, Об одном классе точных решений корректируемой гирорамы, Изв. АН СССР, МТТ, № 5, 1969.
2. В. Н. Кошляков, Теория гироскопических компасов, «Наука», М., 1972.
3. В. В. Румянцев, Об устойчивости движения гиростатов, ПММ, т. 25, вып. 1, 1961.
4. И. Д. Кондорский, К теории гиромаятниковых систем, Изв. АН СССР, МТТ, № 4, 1970.

Поступила 16.V 1974 г.
Институт математики АН УССР