УДК 517—53

Алгебры $L_n^2(\Gamma)$ и структура замкнутых идеалов этих алгебр

Н. М. Осадчий

В данной заметке дается описание структуры замкнутых идеалов алгебр $L_n^2(\Gamma)$ $(n \geqslant 1)$ всех комплекснозначных функций на единичной окружности, у которых n-я производная суммируемая с квадратом, снабженных гильбертовой нормой:

$$\|f\|_{L_n^2(\Gamma)} = \{\|f\|_{L^2}^2 + \|f^{(n)}\|_{L^2}^2\}^{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

Учитывая, что каждая функция $f(z)$, принадлежащая L^2, разлагается в ряд Фурье $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k (z \in \Gamma)$, можно в качестве нормы в $L_n^2(\Gamma)$ принять норму, выраженную через коэффициенты Фурье и эквивалентную норме (1):

$$\|f\|_{L_n^2(\Gamma)} = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 (1 + k^{2n}) \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

Принимая во внимание, что чезаровские средние ряда Фурье функции $f \in L_n^2(\Gamma)$ представляются в виде

$$\sigma_l(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i(\theta - t)}) K_l(t)\, dt,$$

где $K_l(t)$ — ядро Фейера, и, используя свойства этого ядра, получим, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Множество* $\{\dots z^{-2}, z^{-1}, 1, z, z^2, \dots\}$ *фундаментально в пространстве* $L_n^2(\Gamma)$.

Используя это, можно доказать справедливость следующей теоремы.

Теорема 2. *Пространство максимальных идеалов алгебры* $L_n^2(\Gamma)$ $(n \geqslant 1)$ *гомеоморфно окружности* $|z| = 1$.

Пользуясь регулярностью алгебры $L_n^2(\Gamma)$, свойствами интеграла Лебега и тем, что $f^{(n-j)}(e^{it}) = 0\left(|t - t_0|^{j - \frac{1}{2}}\right) (j = 1, \dots, n)$, когда $f(e^{it_0}) = f'(e^{it_0}) = \dots$ $\dots = f^{(n-1)}(e^{it_0}) = 0$, можно убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма. *Для произвольной точки* $M_0(e^{it_0}) \in \Gamma$ *и всякой функции* $f \in L_n^2(\Gamma)$, *обращающейся в нуль в точке* M_0 *вместе со всеми своими производными до* $(n - 1)$*-го порядка включительно, существует последовательность функций* $q_m \in L_n^2(\Gamma)$ *такая, что*

1) $\|fq_m\|_{L_n^2(\Gamma)} \to 0$ *при* $m \to \infty$;

2) $q_m(e^{it}) = 1$ *в некоторой окрестности точки* $M_0 = (e^{it_0})$.

Применив известные рассуждения Г. Е. Шилова (см. [1]) и использовав предыдущую лемму и свойства функций из $L_n^2(\Gamma)$, можно убедиться в справедливости основных теорем данной заметки.

Теорема 3. *В каждом максимальном идеале* M_0 *содержится ровно* n *замкнутых примарных идеалов; каждый из них есть совокупность всех функций* $f \in L_n^2(\Gamma)$, *обращающихся в нуль вместе с фиксированным числом* k $(0 \leqslant k \leqslant n - 1)$ *своих производных.*

Теорема 4. *Каждый замкнутый идеал* I *алгебры* $L_n^2(\Gamma)$ *есть пересечение замкнутых примарных идеалов.*

Аналогичными рассуждениями, используя преобразование Фурье, можно описать также структуру идеалов алгебры $L_n^2(-\infty, \infty)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Е. Шилов, О регулярных нормированных кольцах, Труды Математического ин-та АН СССР, т. 21, 1947.
2. И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов, Коммутативные нормированные кольца, Физматгиз, М., 1960.

Поступила 25.III 1974 г.

Житомирский педагогический институт