УДК 517.949.2

Краевая задача с параметром для систем дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом

З. Б. Сеидов

В работе ищутся такие значения векторных параметров λ, μ ($\|\lambda\| \leqslant \rho$, $\|\mu\| \leqslant \rho'$), при которых начальная задача

$$x''(t) = A\lambda + B\mu + f(t, x(t), x(t-\tau(t)), \lambda, \mu), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$
$$x(t) = \varphi(t, \lambda, \mu), \quad -\tau(0) \leqslant t \leqslant 0, \tag{1}$$
$$x'(0) = x'_0 \tag{2}$$

имеет решение, удовлетворяющее условиям: $x(T) = x_T$, $x'(T) = x'_T$; здесь A, B — постоянные обратимые матрицы размерностями $n \times n$*.

Эта задача допускает следующее толкование: в описываемом физическом процессе ускорение и начальное состояние управляемого объекта зависят от управляющих параметров λ и μ.

Требуется выбрать значения этих параметров так, чтобы объект принял заданное положение при заданной скорости в заданный момент времени. Отметим, что подобная задача для уравнений первого порядка изучена в [1, 2].

Пользуясь методом продолжения и обобщенным принципом о неподвижной точке, доказываются теоремы об однозначной разрешимости этой задачи.

1. Решение начальной задачи (1), соответствующей паре λ, μ ($\|\lambda\| \leqslant \rho$, $\|\mu\| \leqslant \rho'$), обозначим через $x(t, \lambda, \mu)$. Легко видеть, что задача (1), (2) эквивалентна системе:

$$\lambda = 2T^{-2}A^{-1}\Bigg[x_T - \varphi(0, \lambda, \mu) - Tx'_0 - \frac{T^2}{2}B\mu - $$
$$- \int_0^T (T-s) f(s, x(s, \lambda, \mu), x(s-\tau(s), \lambda, \mu), \lambda, \mu)\, ds\Bigg],$$
$$\mu = T^{-1}B^{-1}\left[x'_T - TA\lambda - x'_0 - \int_0^T f(s, x(s, \lambda, \mu), x(s-\tau(s), \lambda, \mu), \lambda, \mu)\, ds\right]. \tag{3}$$

Лемма. *Пусть вектор-функция $f(t, x, y, \lambda, \mu)$ непрерывна в области $R = [0, T] \times \|x\| \leqslant r \times \|y\| \leqslant r \times \|\lambda\| \leqslant \rho \times \|\mu\| \leqslant \rho'$ и*

$$\|f(t, x, y, \lambda, \mu)\| \leqslant M,$$
$$\|f(t, x_1, y_1, \lambda_1, \mu_1) - f(t, x_2, y_2, \lambda_2, \mu_2)\| \leqslant K(\|x_1 - x_2\| +$$
$$+ \|y_1 - y_2\| + \|\lambda_1 - \lambda_2\| + \|\mu_1 - \mu_2\|).$$

Вектор-функция $\varphi(t, \lambda, \mu)$ непрерывна при $t \in [-\tau(0), 0]$, $\|\lambda\| \leqslant \rho$, $\|\mu\| \leqslant \rho'$, $\|\varphi(t, \lambda, \mu\| \leqslant M_1$,

$$\|\varphi(t, \lambda_1, \mu_1) - \varphi(t, \lambda_2, \mu_2)\| \leqslant N(\|\lambda_1 - \lambda_2\| + \|\mu_1 - \mu_2\|).$$

Положительная функция $\tau(t)$ непрерывна при $t \in [-\tau(0), 0]$ и $\tau'(t) < 1$.

---

* Заметим, что наличие двух равноправных параметров λ, μ объясняется тем обстоятельством, что от решения задачи (1) требуется удовлетворения двух равенств: $x(T) = x_T$, $x'(T) = x'_T$.

Далее,

$$M_1 + T\,\|x_0'\| + \frac{T^2}{2}(\|A\|\rho + \|B\|\rho') + \frac{MT^2}{2} \leqslant r.$$

Тогда справедлива оценка

$$\|x(t,\lambda_1,\mu_1) - x(t,\lambda_2,\mu_2)\| \leqslant \delta_1\|\lambda_1-\lambda_2\| + \delta_2\|\mu_1-\mu_2\|;$$

здесь

$$\delta_1 = \exp\left(KT\int_0^T \frac{2-\tau'(\psi(s))}{1-\tau'(\psi(s))}\,ds\right)\left[N + \frac{T^2}{2}(K+\|A\|) + KNTP_1\right].$$

$$\delta_2 = \exp\left(KT\int_0^T \frac{2-\tau'(\psi(s))}{1-\tau(\psi(s))}\,ds\right)\left[N + \frac{T^2}{2}(K+\|B\|) + KNTP_1\right],$$

$\psi(s)$ — *обратная функция функции* $s-\tau(s)$,

$$P_1 = \int_{-\tau(0)}^{0} \frac{ds}{1-\tau'(\psi(s))}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что в силу условий леммы решение начальной задачи (1) существует для каждого λ, μ ($\|\lambda\| \leqslant \rho$, $\|\mu\| \leqslant \rho'$) и $\|x(t,\lambda,\mu)\| \leqslant r$,

$$x(t,\lambda,\mu) = \varphi(0,\lambda,\mu) + tx_0' + \frac{t^2}{2}(A\lambda + B\mu) + \int_0^t (t-s)f(s, x(s,\lambda,\mu), x(s-\tau(s),$$

$$\lambda,\mu),\lambda,\mu)\,ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$x(t,\lambda,\mu) = \varphi(t,\lambda,\mu), \quad -\tau(0) \leqslant t \leqslant 0.$$

Тогда будем иметь

$$\|x(t,\lambda_1,\mu_1) - x(t,\lambda_2,\mu_2)\| \leqslant \left[N + \frac{T^2}{2}\|A\| + \frac{KT^2}{2}\right]\|\lambda_1-\lambda_2\| +$$

$$+ \left(N + \frac{T^2}{2}\|B\| + \frac{KT^2}{2}\right)\|\mu_1-\mu_2\| + K\int_0^t (t-s)[\|x(s,\lambda_1,\mu_1) - x(s,\lambda_2,\mu_2)\| +$$

$$+ \|x(s-\tau(s),\lambda_1,\mu_1) - x(s-\tau(s),\lambda_2,\mu_2)\|]\,ds \leqslant \left(N + \frac{T^2}{2}\|A\| +\right.$$

$$\left.+ \frac{KT^2}{2}\right)\|\lambda_1-\lambda_2\| + \left(N + \frac{T^2}{2}\|B\| + \frac{KT^2}{2}\right)\|\mu_1-\mu_2\| +$$

$$+ KT\int_0^t \|x(s,\lambda_1,\mu_1) - x(s,\lambda_2,\mu_2)\|\,ds + KT\int_{-\tau(0)}^{t} \frac{\|x(s,\lambda_1,\mu_1) - x(s,\lambda_2,\mu_2)\|}{1-\tau'(\psi(s))}\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \left[N + \frac{T^2}{2}(K+\|A\|) + KNTP_1\right]\|\lambda_1-\lambda_2\| + \left[N + \frac{T^2}{2}(K+\|B\|) +\right.$$

$$\left.+ KNTP_1\right]\|\mu_1-\mu_2\| + KT\int_0^t \frac{2-\tau'(\psi(s))}{1-\tau'(\psi(s))}\|x(s,\lambda_1,\mu_1) - x(s,\lambda_2,\mu_2)\|\,ds.$$

Отсюда, используя неравенство Гроноулла-Беллмана (см. [3]), имеем

$$\| x(t, \lambda_1, \mu_1) - x(t, \lambda_2, \mu_2) \| \leqslant \delta_1 \| \lambda_1 - \lambda_2 \| + \delta_2 \| \mu_1 - \mu_2 \|.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы. Далее,*

$$\max \Big\{ 2T^{-2} \| A^{-1} \| \Big[M_1 + \| x_T \| + T \| x_0' \| + \frac{T^2}{2} (M + \| B \| \rho') \Big],$$

$$T^{-1} \| B^{-1} \| [\| x_T' \| + T \| A \| \rho + \| x_0' \| + MT] \Big\} \leqslant \min(\rho, \rho'),$$

$$q = \max \ 2T^{-2} \| A^{-1} \| \Big[2N + \frac{KT^2}{2} (1 + \delta_1) + KT (2NP_1 + P_2 \delta_1 +$$

$$+ P_2 \delta_2) + \frac{T^2}{2} (\| B \| + K(1 + \delta_2)) \Big], \ \| B^{-1} \| \Big[\| A \| + K (2 + 2NP_1 T^{-1} +$$

$$+ (\delta_1 + \delta_2)(1 + P_2 T^{-1})) \Big] \Big\} < 1,$$

где $P_2 = \int\limits_0^T \frac{ds}{1 - \tau'(\psi(s))}$.

Тогда существует единственное решение задачи (1), (2).

Доказательство. Так как краевая задача (1), (2) эквивалентна системе (3), достаточно доказать однозначную разрешимость системы (3).

Введем обозначения

$$z = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix},$$

$$\Phi(z) = \begin{pmatrix} 2T^{-2} A^{-1} \Big[x_T - \varphi(0, \lambda, \mu) - T x_0' - \frac{T^2}{2} B\mu - \\ - \int\limits_0^T (T - s) f(s, x(s, \lambda, \mu), x(s - \tau(s), \lambda, \mu), \lambda, \mu)\, ds \Big] \\ T^{-1} B^{-1} \Big[x_T' - TA\lambda - x_0' - \int\limits_0^T f(s, x(s, \lambda, \mu), x(s - \tau(s), \lambda, \mu), \lambda, \mu) ds \Big] \end{pmatrix}.$$

Норму вектора $z = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ определим так: $\| z \| = \max(\| \lambda \|, \| \mu \|)$. Обозначим через S множество векторов $z = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ ($\| \lambda \| \leqslant \rho$, $\| \mu \| \leqslant \rho'$), для которых $\| z \| \leqslant \bar{\rho} = \min(\rho, \rho')$. Система уравнений (3) эквивалентна операторному уравнению

$$z = \Phi(z). \tag{4}$$

Покажем, что оператор Φ, заданный на S, удовлетворяет условиям принципа сжатых отображений.

Пусть $z \in S$. Тогда

$$\| \Phi(z) \| = \max \Big\{ \Big\| 2T^{-2} A^{-1} \Big[x_T - \varphi(0, \lambda, \mu) - T x_0' - \frac{T^2}{2} B\mu -$$

$$-\int_0^T (T-s) f(s, x(s,\lambda,\mu), x(s-\tau(s),\lambda,\mu),\lambda,\mu)\,ds\Big]\Big\|, \ \Big\|T^{-1}B^{-1}\Big[x_T' - TA\lambda -$$

$$-x_0 - \int_0^T f(s, x(s,\lambda,\mu), x(s-\tau(s),\lambda,\mu),\lambda,\mu)\,ds\Big]\Big\|\Big\} \leqslant \max\Big\{2T^{-2}\|A^{-1}\|\Big[\|x_T\| +$$

$$+ M_1 + T\|x_0'\| + \frac{T^2}{2}\|B\|\rho' + \frac{MT^2}{2}\Big], \ T^{-1}\|B^{-1}\|[\|x_T'\| + T\|A\|\rho +$$

$$+ \|x_0'\| + MT]\Big\} \leqslant \bar{\rho},$$

т. е. $\Phi(z) \in S$.

Далее, пусть $z_1 = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \mu_1\end{pmatrix} \in S$, $\quad z_2 = \begin{pmatrix}\lambda_2\\ \mu_2\end{pmatrix} \in S$, тогда имеем

$$\|\Phi(z_1) - \Phi(z_2)\| \leqslant \max\Big\{2T^{-2}\|A^{-1}\|\Big[N(\|\lambda_1-\lambda_2\| + \|\mu_1-\mu_2\|) +$$

$$+ \frac{T^2}{2}\|B\|\,\|\mu_1-\mu_2\| + K\int_0^T (T-s)(\|x(s,\lambda_1,\mu_1) - x(s,\lambda_2,\mu_2)\| +$$

$$+ \|x(s-\tau(s),\lambda_1,\mu_1) - x(s-\tau(s),\lambda_2,\mu_2)\| + \|\lambda_1-\lambda_2\| + \|\mu_1-\mu_2\|)\,ds\Big],$$

$$T^{-1}\|B^{-1}\|\Big[T\|A\|\,\|\lambda_1-\lambda_2\| + K\int_0^T (\|x(s,\lambda_1,\mu_1) - x(s,\lambda_2,\mu_2)\| +$$

$$+ \|x(s-\tau(s),\lambda_1,\mu_1) - x(s-\tau(s),\lambda_2,\mu_2)\| + \|\lambda_1-\lambda_2\| + \|\mu_1-\mu_2\|)\,ds\Big]\Big\}.$$

Учитывая здесь утверждение доказанной леммы получаем

$$\|\Phi(z_1) - \Phi(z_2)\| \leqslant \max\Big\{2T^{-2}\|A^{-1}\|\Big[\Big(N + \frac{KT^2}{2}(1+\delta_1) +$$

$$+ KT(NP_1 + P_2\delta_1)\Big)\|\lambda_1-\lambda_2\| + \Big(N + \frac{T^2}{2}(K + \|B\| + K\delta_2) +$$

$$+ KT(NP_1 + P_2\delta_2)\Big)\|\mu_1-\mu_2\|\Big], \ \|B^{-1}\|[(\|A\| + K(1 + \delta_1 + NT^{-1}P_1 +$$

$$+ P_2T^{-1}\delta_1))\|\lambda_1-\lambda_2\| + K(1 + \delta_2 + NT^{-1}P_1 +$$

$$+ P_2T^{-1}\delta_2)\|\mu_1-\mu_2\|]\Big\} \leqslant q\|z_1 - z_2\|.$$

Так как $q < 1$, то выполнены условия принципа сжатых отображений (см. [4]). Поэтому операторное уравнение (4) и, следовательно, задача (1), (2) имеет единственное решение.

Теорема доказана.

2. Теперь дадим еще одно достаточное условие для однозначной разрешимости задачи (1), (2).

Пусть $\|\lambda\|\leqslant\rho$, $\|\mu\|\leqslant\rho'$, а $x(t)$ ($\|x(t)\|\leqslant r$) непрерывна при $t\in[-\tau(0),T]$, причем при $t\in[-\tau(0),0]$ $x(t)=\varphi(t,\lambda,\mu)$. Обозначим $u(t)=\begin{pmatrix} x(t)\\ \lambda\\ \mu\end{pmatrix}$. Введем обобщенную норму $|u(t)|=\begin{pmatrix}\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\|x(t)\|\\ \|\lambda\|\\ \|\mu\|\end{pmatrix}$. Система уравнений (3) эквивалентна операторному уравнению: $u(t)=\Phi u(t)$, где

$$\Phi u(t)=\begin{pmatrix} \varphi(0,\lambda,\mu)+tx_0'+\dfrac{t^2}{2}(A\lambda+B\mu)+\\ +\displaystyle\int_0^t(t-s)f(s,x(s),x(s-\tau(s)),\lambda,\mu)\,ds\\ 2T^{-2}A^{-1}\Big[x_T-\varphi(0,\lambda,\mu)-Tx_0'-\dfrac{T^2}{2}B\mu-\\ -\displaystyle\int_0^T(T-s)f(s,x(s),x(s-\tau(s)),\lambda,\mu)\,ds\Big]\\ T^{-1}B^{-1}\Big[x_T'-TA\lambda-x_0'-\displaystyle\int_0^T f(s,x(s),x(s-\tau(s)),\lambda,\mu)\,ds\Big]\end{pmatrix}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1, *кроме условия* $q<1$.

Далее, собственные значения матрицы

$$S=\begin{pmatrix} KT\left(\dfrac{T}{2}+P_2\right) & N+\dfrac{T^2}{2}(K+\|A\|)+KNTP_1 & N+\dfrac{T^2}{2}(K+\|B\|)+KNTP_1\\ 2T^{-1}\|A^{-1}\|K\left(\dfrac{T}{2}+P_2\right) & 2T^{-2}\|A^{-1}\|\left(N+\dfrac{KT^2}{2}+KNTP_1\right) & 2T^{-2}\|A^{-1}\|\left(N+\dfrac{T^2}{2}(K+\|B\|)+KNTP_1\right)\\ KT^{-1}\|B^{-1}\|(T+P_2) & T^{-1}\|B^{-1}\|(T\|A\|+KT+KNP_1) & T^{-1}\|B^{-1}\|K(T+NP_1)\end{pmatrix}$$

лежат внутри единичного круга.

Тогда существует единственное решение задачи (1), (2).

Доказательство. Обозначим через F замкнутое множество вектор-функций $u(t)=\begin{pmatrix} x(t)\\ \lambda\\ \mu\end{pmatrix}$, удовлетворяющих условию $|u(t)|\leqslant\begin{pmatrix} r\\ \rho\\ \rho'\end{pmatrix}$. Здесь $x(t)$ определена при $t\in[-\tau(0),T]$ и $x(t)=\varphi(t,\lambda,\mu)$ при $t\in[-\tau(0),0]$. Отметим, что неравенства между векторами понимаются покомпонентно.

Покажем, что оператор Φ удовлетворяет условиям обобщенного принципа о неподвижной точке (см., например, [5]).

Пусть $u(t)\in F$. Тогда имеем

$$|\Phi u(t)| \leqslant \begin{pmatrix} M_1 + T\|x_0'\| + \frac{T^2}{2}(\|A\|\rho + \|B\|\rho') + \frac{MT^2}{2} \\ 2T^{-2}\|A^{-1}\|\left[\|x_T\| + M_1 + T\|x_0'\| + \frac{T^2}{2}\|B\|\rho' + \frac{MT^2}{2}\right] \\ T^{-1}\|B^{-1}\|[\|x_T'\| + T\|A\|\rho + \|x_0'\| + MT] \end{pmatrix} \leqslant$$

$$\leqslant \begin{pmatrix} r \\ \rho \\ \rho' \end{pmatrix},$$

т. е. $\Phi u(t) \in F$. Далее пусть $u_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} \in F$, $u_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \in F$. Тогда в силу условия теоремы будем иметь

$$|\Phi u_1(t) - \Phi u_2(t)| \leqslant$$

$$\leqslant \begin{pmatrix} \left(N + \frac{T^2}{2}(K + \|A\|)\right)\|\lambda_1 - \lambda_2\| + \left(N + \frac{T^2}{2}(K + \|B\|)\right)\|\mu_1 - \mu_2\| + \\ + K\int_0^t (t-s)[\|x_1(s) - x_2(s)\| + \|x_1(s-\tau(s)) - x_2(s-\tau(s))\|]\,ds \\ 2T^{-2}\|A^{-1}\|\left[\left(N + \frac{KT^2}{2}\right)\|\lambda_1 - \lambda_2\| + \left(N + \right.\right. \\ \left. + \frac{T^2}{2}(K + \|B\|)\right)\|\mu_1 - \mu_2\| + K\int_0^T (T-s)(\|x_1(s) - x_2(s)\| + \\ \left. + \|x_1(s-\tau(s)) - x_2(s-\tau(s))\|)\,ds\right] \\ T^{-1}\|B^{-1}\|\left[T(K + \|A\|)\|\lambda_1 - \lambda_2\| + KT\|\mu_1 - \mu_2\| + \right. \\ \left. + K\int_0^T (\|x_1(s) - x_2(s)\| + \|x_1(s-\tau(s)) - x_2(s-\tau(s))\|)\,ds\right] \end{pmatrix} \leqslant$$

$$\leqslant \begin{pmatrix} \left(N + \frac{T^2}{2}(K + \|A\|) + KNTP_1\right)\|\lambda_1 - \lambda_2\| + \left(N + \frac{T^2}{2}(K + \|B\|) + \right. \\ \left. + KNTP_1\right)\|\mu_1 - \mu_2\| + KT\left(\frac{T}{2} + P_2\right)\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\|x_1(t) - x_2(t)\| \\ 2T^{-2}\|A^{-1}\|\left[\left(N + \frac{KT^2}{2} + KNTP_1\right)\|\lambda_1 - \lambda_2\| + \right. \\ + \left(N + \frac{T^2}{2}(K + \|B\|) + KNTP_1\right)\|\mu_1 - \mu_2\| + \\ \left. + KT\left(\frac{T}{2} + P_2\right)\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\|x_1(t) - x_2(t)\|\right] \\ T^{-1}\|B^{-1}\|[(T\|A\| + KT + KNP_1)\|\lambda_1 - \lambda_2\| + \\ + K(T + NP_1)\|\mu_1 - \mu_2\| + K(T + P_2)\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\|x_1(t) - x_2(t)\|] \end{pmatrix} =$$

$$= S|u_1(t) - u_2(t)|.$$

Так как матрица S — положительная и все ее собственные значения лежат внутри единичного круга, то выполненыусловия обобщенного принципа о неподвижной точке. Следовательно, задача (1), (2) однозначно разрешима.

В заключение отметим, что полученные результаты верны также и в случае, когда A, B зависят от t и $\tau(t) = \tau(t, \lambda, \mu)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. З. Б. Сеидов, Краевая задача для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, УМЖ, т.25, № 6, 1973.
2. Х. Бенсаад, С. Б. Норкин, Краевая задача с управлением в начальной функции для нелинейных систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, УМЖ, т. 26, № 1, 1974.
3. Р. Беллман, Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1954.
4. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, «Наука», М., 1965.
5. М. А. Красносельский, Приближенное решение операторных уравнений, «Наука», М., 1970.

Поступила 4.II 1974 г.

Азербайджанский государственный университет