3. K. Jamazaki, On projective representations and ring extensions of finite groups, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 10, N2, 1964.
4. Л. Ф. Баранник, О точных проективных представлениях абелевых групп, Матем. заметки, т. 10, № 3, 1971.
5. Э. М. Жмудь, Симплектические геометрии и проективные представления конечных абелевых групп, Матем. сб., т. 87, № 1, 1972.
6. Ч. Кэртис, И. Райнер, Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, «Наука», М., 1969.

Поступила 20.XII 1972 г.
Полтавский педагогический институт

УДК 517.948:513.77+519.4

Одно замечание относительно существенной самосопряженности степеней оператора

Ю. М. Березанский

А. Я. Повзнером [1] и автором [2, гл. VI, § 1, п. 7, гл. VIII, § 2, п. 2] предложен метод доказательства существенной самосопряженности полуограниченного снизу оператора A, сводящийся к установлению единственности решений задачи Коши для соответствующего эволюционного уравнения (в связи с применением и развитием такого метода см. работы [3—5] и литературу в них). Целью этой заметки является доказательство простой общей теоремы, которая, грубо говоря, утверждает, что если подобным способом удается доказать существенную самосопряженность некоторого оператора A, то автоматически оказывается доказанной существенная самосопряженность и любой степени A^n ($n = 1, 2, \ldots$).

Поэтому соответствующие результаты работ [2, 4] справедливы и для степеней дифференциальных операторов. В частности, результаты работы А. А. Чумака [4] позволяют утверждать существенную самосопряженность не только оператора Бельтрами—Лапласа, но и любой его степени; этот результат независимо и одновременно с А. А. Чумаком получил Г. Кордес [6]. Отметим, что близкий к [1, 2] подход к доказательству существенной самосопряженности недавно предложил П. Чернов [7].

1°. Теорема. *Пусть H — гильбертово пространство, $\mathfrak{D} \subseteq H$ — плотное в H линейное множество, на котором определен полуограниченный снизу эрмитов оператор A такой, что $A\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{D}$. Предположим, что для каждых $T > 0$ и $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathfrak{D}$ существует вектор-функция $[0, T] \ni t \to \varphi(t) \in \mathfrak{D}$ такая, что: 1) при каждом $n = 0, 1, \ldots$ вектор-функция $[0, T] \ni t \to A^n\varphi(t) \in H$ дважды сильно непрерывно дифференцируема; 2) удовлетворяется следующее уравнение и начальные условия:*

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)(t) + A\varphi(t) = 0 \quad (t \in [0, T]),\ \varphi(T) = \varphi_0,\ \varphi'(T) = \varphi_1. \tag{1}$$

При этих предположениях каждая степень A^n ($n = 1, 2, \ldots$), определенная на $\mathfrak{D}$, в существенном самосопряжена.

Доказательство. Пусть $A \geqslant c\,\mathbf{1}$ ($c \in \mathbf{R}^1$), положим $B = A + a\mathbf{1}$, где $a = -c + 1$; очевидно $B \geqslant \mathbf{1}$. Зафиксируем $m = 0, 1, \ldots$ и введем на $\mathfrak{D}$ скалярное произведение

$$(f, g)_{\mathfrak{H}_m} = (B^m f, B^m g)_H \qquad (f, g \in \mathfrak{D}). \tag{2}$$

Так как $\|Bf\|_H \geqslant \|f\|_H$, то и $\|B^m f\|_H \geqslant \|f\|_H$ ($f \in \mathfrak{D}$). Поэтому (2) действительно определяет скалярное произведение в $\mathfrak{D}$, пусть $\mathfrak{H}_m$ — соответствующее пополнение $\mathfrak{D}$ ($\mathfrak{H}_0 = H$).

По A построим оператор $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{H}_m$, беря $\mathfrak{D}$ в качестве его области определения $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ и полагая $\mathfrak{A}f = Af$ ($f \in \mathfrak{D}$). Этот оператор эрмитов в $\mathfrak{H}_m$ и полуограничен: $(\mathfrak{A}f, g)_{\mathfrak{H}_m} = (B^m Af, B^m g)_H = (B^m f, B^m Ag)_H = (f, \mathfrak{A}g)_{\mathfrak{H}_m}$ $(f, g \in \mathfrak{D})$, $(\mathfrak{A}f, f)_{\mathfrak{H}_m} = (B^m Af, B^m f)_H = (AB^m f, B^m f)_H \geqslant c \| B^m f \|_H^2 = c \| f \|^2_{\mathfrak{H}_m}$ $(f \in \mathfrak{D})$. Он будет и в существенном самосопряженным. Действительно, для этого согласно теореме 1 и лемме 1 из [5] (или [2, гл. VI, теорема 1.7, лемма 1.4]) достаточно, чтобы в $\mathfrak{H}_m$ существовало плотное линейное множество Φ такое, что для любых $T > 0$ и $\varphi_0, \varphi_1 \in \Phi$ задача Коши

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)(t) + (\mathfrak{A}\varphi)(t) = 0 \ \ (t \in [0, T]), \ \varphi(T) = \varphi_0, \ \varphi'(T) = \varphi_1 \tag{3}$$

имела сильное решение $[0, T] \ni t \to \varphi(t) \in \mathfrak{H}_m$. Легко понять, что таким решением будет служить функция $\varphi(t)$, фигурирующая в условии теоремы. В самом деле, ее можно понимать как вектор-функцию $\varphi(t) : [0, T] \to \mathfrak{H}_m$, причем она будет дважды непрерывно дифференцируемой (последнее вытекает из того, что $B^m\varphi(t) = A^m\varphi(t) + maA^{m-1}\varphi(t) + \ldots + a^m\varphi(t) : [0, T] \to H$ дважды сильно непрерывно дифференцируема). При каждом $t \in [0, T]$ $\varphi(t) \in \mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ и (3) удовлетворяется благодаря (2).

Итак, $\mathfrak{A}$ в существенном самосопряжен и поэтому для каждого $z \bar{\in} [c, \infty)$ область значений $\mathfrak{A} - z\mathbf{1}$, т. е. $(A - z\mathbf{1})\mathfrak{D}$, плотна в $\mathfrak{H}_m$ $(m = 0, 1, \ldots)$.

Зафиксируем $n = 1, 2, \ldots$ и невещественное число z такое, что ни один из корней $z_1, \ldots, z_n$ n-й степени из этого числа не попадает на $[c, \infty)$. Для доказательства теоремы достаточно установить, что $(A^n - z\mathbf{1})\mathfrak{D}$ плотно в H. Очевидно на $\mathfrak{D}$ справедливо разложение $A^n - z\mathbf{1} = \prod_{j=1}^{n} (A - z_j\mathbf{1})$, поэтому для любых $f_0 \in H$ и $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{D}$ можно написать неравенство

$$\| f_0 - (A^n - z\mathbf{1}) f_n \|_H \leqslant \| f_0 - (A - z_1\mathbf{1}) f_1 \|_H + \\ + \sum_{m=1}^{n-1} \left\| \left(\prod_{j=1}^{m} (A - z_j\mathbf{1}) \right) (f_m - (A - z_{m+1}\mathbf{1}) f_{m+1}) \right\|_H . \tag{4}$$

Для $\zeta \in \mathbf{C}^1$ и $g \in \mathfrak{D}$ имеем $\|(A - \zeta\mathbf{1}) g\|_H = \|(B - (\zeta + a)\mathbf{1}) g\|_H \leqslant \leqslant (1 + |\zeta + a|) \| Bg \|_H$. Итерируя эту оценку и используя коммутируемость A и B и (2), можем продолжить (4) следующим образом:

$$\| f_0 - (A^n - z\mathbf{1}) f_n \|_H \leqslant \| f_0 - (A - z_1\mathbf{1}) f_1 \|_H + \\ + \sum_{m=1}^{n-1} \left(\prod_{j=1}^{m} (1 + |z_j + a|) \right) \| B^m (f_m - (A - z_{m+1}\mathbf{1}) f_{m+1}) \|_H \leqslant \\ \leqslant C \sum_{m=0}^{n-1} \| f_m - (A - z_{m+1}\mathbf{1}) f_{m+1} \|_{\mathfrak{H}_m}, \tag{5}$$

где C — константа, зависящая от a и z_j.

Пусть $f_0 \in H$ и $\varepsilon > 0$ заданы. Благодаря плотности $(A - z\mathbf{1})\mathfrak{D}$ в $\mathfrak{H}_0$ подберем такое $f_1 \in \mathfrak{D}$, чтобы $\| f_0 - (A - z_1\mathbf{1}) f_1 \|_{\mathfrak{H}_0} < \varepsilon$. Затем благодаря плотности $(A - z\mathbf{1})\mathfrak{D}$ в $\mathfrak{H}_1$ подберем такое $f_2 \in \mathfrak{D}$, чтобы $\| f_1 - (A - z_2\mathbf{1}) f_2 \|_{\mathfrak{H}_1} < \varepsilon$ и т. д.; $f_n \in \mathfrak{D}$ подбираем так, чтобы $\| f_{n-1} - (A - z_n\mathbf{1}) f_n \|_{\mathfrak{H}_{n-1}} < \varepsilon$. В результате из (5) будет следовать оценка $\| f_0 - (A^n - z\mathbf{1}) f_n \|_H < Cn\varepsilon$, что и доказывает плотность $(A^n - z\mathbf{1})\mathfrak{D}$ в H.

2°. В приложениях этой теоремы к дифференциальным операторам $\mathfrak{D}$ состоит из бесконечно дифференцируемых функций и поэтому условие $A\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{D}$ влечет требование бесконечной дифференцируемости коэффициентов. Если интересоваться существенной самосопряженностью определенной n-й степени A, то это требование можно избежать. Для этого нужно несколько ослабить предположения теоремы, доказательство ее остается прежним. Именно, пусть A — эрмитов оператор в H с плотной областью определения $\mathfrak{D}(A)$. Положим $\mathfrak{D}(A^m) = \{f \in \mathfrak{D}(A) \mid Af \in \mathfrak{D}(A), \ldots, A^{m-1}f \in \mathfrak{D}(A)\}$, оператор A^m определяется естественным образом на $\mathfrak{D}(A^m)$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Очевидно $\mathfrak{D}(A) \supseteq \mathfrak{D}(A^2) \supseteq \ldots$. *Пусть* $n = 1, 2, \ldots$ *фиксировано,* A — *эрмитовый оператор в* H *с областью определения* $\mathfrak{D}(A)$, *причем* $\mathfrak{D}(A^n)$ *плотно в* H. *Предположим, что для каждых* $T > 0$ *и* $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathfrak{D}(A^{n-1})$ *существует вектор-функция* $[0, T] \ni t \to \varphi(t) \in \mathfrak{D}(A^n)$ *такая, что:* 1) *при каждом* $m = 0, \ldots, n$ *вектор-функция* $[0, T] \ni t \to A^m\varphi(t) \in H$ *дважды сильно непрерывно дифференцируема;* 2) *выполняется условие* 2) *теоремы. Тогда ее утверждение сохраняется для* A^n.

Отметим также, что теорема, аналогичная доказанной в п. 1°, справедлива и для других эволюционных уравнений (ср. [2, гл. VI, § 1, п. 7]).

3°. Приведем два приложения теоремы к дифференциальным операторам, оставляя в стороне сказанное в п. 2° и ограничиваясь случаем бесконечно дифференцируемых коэффициентов.

А. Рассмотрим в пространстве $L_2(\mathbf{R}^N)$ $(N = 2, 3, \ldots)$, построенном по лебеговой мере в $\mathbf{R}^N$, эллиптическое дифференциальное выражение

$$(\mathrm{L}\,u)(x) = -\sum_{j,k=1}^{N} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\right)(x) + 2i\sum_{j=1}^{N} b_j(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)(x) + i\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial b_j}{\partial x_j}\right)(x)\,u(x) + q(x)\,u(x)$$

с вещественными коэффициентами a_{jk}, b_j, $q \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$, причем для каждого x матрица $A(x) = (a_{jk}(x))_{j,k=1}^N$ положительно определена. Пусть $\mu(x)$ — максимальное собственное значение матрицы $A(x)$, $c(r) = \sup\limits_{|x| \leqslant r} \mu(x)$ и интеграл $\int^{\infty} c^{-\frac{1}{2}}(r)\,dr$ расходится. Если на классе $C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций выражение L полуограничено снизу (т. е. $(\mathrm{L}\,u, u)_{L_2(\mathbf{R}^N)} \geqslant c\|u\|^2_{L_2(\mathbf{R}^N)}$, $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ при некотором $c \in \mathbf{R}^1$), то при любом $n = 1, 2, \ldots$ оператор в $H = L_2(\mathbf{R}^N)$ $C_0^\infty(\mathbf{R}^N) \ni u \to (\underbrace{\mathrm{L} \ldots \mathrm{L}}_{n}\, u)(x)$ в существенном самосопряжен.

Действительно, рассуждение при доказательстве теоремы 1.8 из [2, гл. VI] фактически обеспечивает выполнение предположений теоремы п. 1°. Сейчас $\mathfrak{D} = C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, благодаря условию $\int^{\infty} c^{-\frac{1}{2}}(r)\,dr = \infty$ финитные начальные данные решения задачи Коши для уравнения $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)(x, t) + (\mathrm{L}u)(x, t) = 0$ приводят к финитности при каждом t решения $u(x, t)$ (так как $\mu^{\frac{1}{2}}(x)$ — локальная скорость распространения возмущения для этого уравнения), причем оно бесконечно дифференцируемо относительно x согласно результатам С. Л. Соболева [8, § 21, п. 6].

Другим способом этот результат получен в [7].

Б. Пусть M — полное паракомпактное C^∞-риманово многообразие без края, $C_0^\infty(M)$ — класс финитных бесконечно дифференцируемых функций на M и $L_2(M, dp)$ — пространство суммируемых с квадратом по римановой мере dp функций на M, Δ — соответствующее выражение Бельтрами — Лапласа. Тогда при любом $n = 1, 2, \ldots$ оператор в $H = L_2(M, dp)$ $C_0^\infty(M) \ni u \to (\underbrace{\Delta \ldots \Delta}_{n} u)(x)$ в существенном самосопряжен.

Действительно, рассуждение работы [4] фактически проверяет условия теоремы из п. 1°.

Другим способом этот результат получ н в [6, 7].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Я. Повзнер, О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора $-\Delta u + cu$, Матем. сб., т. 32, № 1, 1953.
2. Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, «Наукова думка», К., 1965.
3. Ю. Б. Орочко, Теорема єдиності самоспряженого розширення оператора Шредінгера з операторним потенціалом, ДАН УРСР, № 11, 1966.
4. А. А. Чумак, Самосопряженность оператора Бельтрами—Лапласа на полном паракомпактном римановом многообразии без края, УМЖ, т. 25, № 6, 1973.
5. Ю. М. Березанский, Самосопряженность эллиптических операторов с сингулярным потенциалом, УМЖ, т. 26, № 5, 1974.
6. H. O. Cordes, Self-adjointness of powers of elliptic operators on non-compact manifolds, Math. Ann., 195, 1972, 257—272.
7. P. R Chernoff, Essential self-adjointness of powers of generators of hyperbolic equations, J. Funct. Anal., 12, 1973, 401—414.
8. С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд-во ЛГУ, Ленинград, 1950.

Поступила 27.III 1974 г.
Институт математики АН УССР

УДК 517.535.3+517.566

Об аналитическом продолжении функции, заданной одним рядом Дирихле

В. П. Бурлаченко

1. Рассмотрим следующий ряд Дирихле:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s \ln n}, \qquad s = \sigma + it, \tag{1}$$

который, как нетрудно показать, сходится абсолютно и равномерно при $\operatorname{Re} s \geqslant 1 + \delta, \delta > 0$, и определяет в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$ некоторую аналитическую функцию.