УДК 517.535.3+517.566

Об аналитическом продолжении функции, заданной одним рядом Дирихле

В. П. Бурлаченко

1. Рассмотрим следующий ряд Дирихле:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s \ln n}, \qquad s = \sigma + it, \tag{1}$$

который, как нетрудно показать, сходится абсолютно и равномерно при $\operatorname{Re} s \geqslant 1 + \delta$, $\delta > 0$, и определяет в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$ некоторую аналитическую функцию.

В работе [1] предложен метод аналитического продолжения функции, заданной при $\operatorname{Re} s > 1$ более простым рядом Дирихле. В данной статье показано, что тот же метод может быть применен для аналитического продолжения функции, заданной рядом (1). При этом, как и в работе [1], эту функцию можно постепенно аналитически продолжать на полуплоскости $\operatorname{Re} s > -m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, кроме точки $s = 1$, где в наличии логарифмический полюс.

2. Для решения поставленной задачи потребуется следующая лемма:

Лемма. *Функция* $f(s)$, *определенная в области* $\operatorname{Re} s > 1$ *интегралом*

$$f(s) = \int_2^\infty \frac{dx}{x^s \ln x}, \qquad s = \sigma + it,$$

аналитически продолжается на всю конечную плоскость, кроме точки $s = 1$, *где эта функция имеет логарифмический полюс с вычетом, равным минус единице. При этом*

$$f(s) = -\ln(s-1) - \ln\ln 2 + \int_1^{(s-1)\ln 2} \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt + \int_1^\infty \frac{dt}{te^t}. \tag{2}$$

Доказательство. Отметим прежде всего, что аналитичность функции $f(s)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$ следует из теоремы Витали (см., например, [2, стр. 371—373]). Далее, при любом действительном $s > 1$, производя замену $x = e^{\frac{t}{s-1}}$, будем иметь

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^s \ln x} = \int_{(s-1)\ln 2}^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \int_{(s-1)\ln 2}^1 \frac{e^{-t}}{t}\,dt + \int_1^\infty \frac{dt}{te^t} =$$

$$= \int_{(s-1)\ln 2}^1 \frac{dt}{t} + \int_{(s-1)\ln 2}^1 \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt + \int_1^\infty \frac{dt}{te^t} =$$

$$= -\ln(s-1) - \ln\ln 2 + \int_1^{(s-1)\ln 2} \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt + \int_1^\infty \frac{dt}{te^t}. \tag{3}$$

Вследствие того, что функция $\varphi_1(s) = \int_1^{(s-1)\ln 2} \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt$ имеет производную, являющуюся, как нетрудно проверить, аналитической функцией во всей конечной плоскости, заключаем, что и сама функция $\varphi_1(s)$ — аналитическая во всей конечной плоскости. Учитывая, кроме этого, что интеграл $\int_1^\infty \frac{dt}{te^t}$ сходится, убеждаемся на основании (3) в справедливости утверждения леммы и получаем (2). Лемма доказана полностью.

Рассмотрим теперь функцию, определяемую в области $\operatorname{Re} s > 1$ рядом (1). Обозначим эту функцию через $\zeta_1(s)$.

Теорема. *Функкия* $\zeta_1(s)$, *определяемая при* $\operatorname{Re} s > 1$ *рядом*

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^s \ln n}, \tag{4}$$

аналитически продолжается на полуплоскость $\operatorname{Re} s > 0$, *кроме точки* $s = 1$, *где она имеет логарифмический полюс с вычетом, равным минус единице. В полуплоскости* $\operatorname{Re} s > 0$ *она представляется формулой*

$$\zeta_1(s) = -\ln(s-1) + \varphi(s) + \sum_{n\cdot k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{a_{k,n+1}(s)}{(k+1)!\,(n+1)^{s+k}\ln(n+1)}, \tag{5}$$

где

$$a_{k,n+1}(s) = u_k(s) + \frac{u_k'(s)}{\ln(n+1)} + \ldots + \frac{u_k^{(k)}(s)}{\ln^k(n+1)},$$

$$u_k(s) = s(s+1)\ldots(s+k-1),$$

$$\varphi(s) = -\ln\ln 2 + \int_1^{\infty} \frac{dt}{te^t} + \int_1^{(s-1)\ln 2} \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt.$$

Доказательство. Для всех действительных $s > 1$ имеем

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s \ln n} - \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^s \ln x} = \frac{1}{2^s \ln 2} - \int_2^3 \frac{dx}{x^s \ln x} +$$

$$+ \sum_{n=3}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s \ln n} - \frac{1}{x^s \ln x}\right) dx. \tag{6}$$

Для каждой из функций

$$F_n(x) = \frac{1}{n^s \ln n} - \frac{1}{x^s \ln x}, \qquad n = 3, 4, 5, \ldots,$$

будет

$$F_n(n) = 0, \quad F_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}}{x^{s+k} \ln x}\left[u_k(s) + \frac{u_k'(s)}{\ln x} + \ldots + \frac{u_k^{(k)}(s)}{\ln^k x}\right],$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots,$$

где $u_k(s) = s(s+1)\ldots(s+k-1)$.

Следовательно, функция $F_n(x)$ в окрестности точки $x = n$ разлагается в степенной ряд

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_n^{(k)}(n)}{k!}(x-n)^k. \tag{7}$$

Нетрудно показать, что ряд (7) в промежутке $[n, n+1]$, $n = 3, 4, 5, \ldots$, сходится абсолютно и равномерно к функции $F_n(x)$.
Учитывая это, на основании (6) получаем

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s \ln n} - \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^s \ln x} =$$

$$= \int_2^3 \left(\frac{1}{2^s \ln 2} - \frac{1}{x^s \ln x}\right) dx + \sum_{n=3}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_n^{(k)}(n)}{k!}(x-n)^k\right) dx =$$

$$= \int_2^3 \left(\frac{1}{2^s \ln 2} - \frac{1}{x^s \ln x} \right) dx + \sum_{n=3}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_n^{(k)}(n)}{(k+1)!} \right) =$$

$$= \int_2^3 \left(\frac{1}{2^s \ln 2} - \frac{1}{x^s \ln x} \right) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_{n+2}^{(k)}(n+2)}{(k+1)!} \right),$$

т. е. при всех действительных $s > 1$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s \ln n} - \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^s \ln x} = \int_2^3 \left(\frac{1}{2^s \ln 2} - \frac{1}{x^s \ln x} \right) dx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{a_{k,n+2}(s)}{(k+1)!\,(n+2)^{s+k} \ln (n+2)} \right), \tag{8}$$

где $a_{k,n+2}(s) = u_k(s) + \dfrac{u_k'(s)}{\ln (n+2)} + \ldots + \dfrac{u_k^{(k)}(s)}{\ln^k (n+2)}$.

Рассмотрим теперь двойной ряд при комплексных $s = \sigma + it$

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{a_{k,n+2}(s)}{(k+1)!\,(n+2)^{s+k} \ln (n+2)}. \tag{9}$$

Возьмем произвольное сколь угодно малое $\delta > 0$ и сколь угодно большое конечное $R > \delta$ и рассмотрим замкнутую область D: $|s| \leqslant R$, $\operatorname{Re} s \geqslant \delta$.

Покажем, что двойной ряд (9) в области D сходится абсолютно и равномерно. Для этого воспользуемся признаком сходимости двойных рядов, установленным в работе [1].

Пусть $s \in D$. Тогда

$$\left| (-1)^{k-1} \frac{a_{k,n+2}(s)}{(k+1)!\,(n+2)^{s+k} \ln (n+2)} \right| \leqslant \frac{a_{k,n+2}(R)}{(k+1)!\,(n+2)^{\delta+k} \ln (n+2)},$$

так как

$$a_{k,n+2}(R) = u_k(R) + \frac{u_k'(R)}{\ln (n+2)} + \ldots + \frac{u_k^{(k)}(R)}{\ln^k (n+2)} > 0. \tag{10}$$

Вследствие того, что в (10) все члены положительны ($R > \delta > 0$), для $n \geqslant 1$

$$a_{k,n+2}(R) < u_k(R) + u_k'(R) + \ldots + u_k^{(k)}(R) = b_k(R). \tag{11}$$

Таким образом, на основании (11) следующий двойной ряд (с положительными членами):

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{b_k(R)}{(k+1)!\,(n+2)^{\delta+k} \ln (n+2)} \tag{12}$$

является мажорирующим для ряда (9). К ряду (12) и применим признак сходимости из работы [1]:

$$L_n^{(k)} = \frac{b_{k+1}(R)}{(k+2)!\,(n+2)^{\delta+k+1} \ln (n+2)} : \frac{b_k(R)}{(k+1)!\,(n+2)^{\delta+k} \ln (n+2)} =$$

$$= \frac{1}{(k+2)(n+2)} \frac{b_{k+1}(R)}{b_k(R)}. \tag{13}$$

Так как $u_k(s) = s(s+1)\dots(s+k-1)$, то $u_{k+1}(s) = u_k(s)\cdot(s+k)$, $k = 1, 2, 3, \dots$ Отсюда для производных порядка $p = 1, 2, \dots, k+1$ имеем

$$u_{k+1}^{(p)}(s) = (s+k)\,u_k^{(p)}(s) + p u_k^{(p-1)}(s),$$

причем, так как $u_k^{(p)}(s) = 0$ при $p > k$, то $u_{k+1}^{(k+1)}(s) = (k+1)\,u_k^{(k)}$. Поэтому на основании (11) получаем

$$b_{k+1}(R) = u_{k+1}(R) + u'_{k+1}(R) + \dots + u_{k+1}^{(k+1)}(R) = (R+k)\,[u_k(R) + u'_k(R) + \dots$$
$$\dots + u_k^{(k)}(R)] + u_k(R) + 2u'_k(R) + \dots + (k+1)\,u_k^{(k)}(R).$$

Отсюда, принимая во внимание (11), получаем

$$\frac{b_{k+1}(R)}{b_k(R)} = R + k + \frac{u_k(R) + 2u'_k(R) + \dots + (k+1)\,u_k^{(k)}(R)}{u_k(R) + u'_k(R) + \dots + u_k^{(k)}(R)} <$$
$$< R + k + (k+1),$$

т. е.

$$\frac{b_{k+1}(R)}{b_k(R)} < R + 1 + 2k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \tag{14}$$

Из (13) имеем

$$\lim_{n,k\to\infty} L_n^{(k)} = \lim_{n,k\to\infty}\left[\frac{1}{(k+2)(n+2)}\,\frac{b_{k+1}(R)}{b_k(R)}\right] = 0 < 1. \tag{15}$$

Учитывая (14), легко также показать, что в двойном ряде (12) сходятся все ряды по столбцам и все ряды по строкам, что в сочетании с (15) обеспечивает сходимость двойного ряда (12). А это значит, что двойной ряд (9) в области D сходится абсолютно и равномерно, т. е. представляет собой аналитическую в области $\operatorname{Re} s > 0$ функцию.

Отсюда, учитывая, что функция

$$\int_2^3 \left(\frac{1}{2^s \ln 2} - \frac{1}{x^s \ln x}\right) dx \tag{16}$$

является аналитической во всей конечной плоскости и принимая во внимание лемму, из (8) по принципу аналитического продолжения получаем, что функция $\zeta_1(s)$, определяемая при $\operatorname{Re} s > 1$ рядом (4), аналитически продолжается на полуплоскость $\operatorname{Re} s > 0$, кроме точки $s = 1$, где налицо логарифмический полюс. При этом в области $\operatorname{Re} s > 0$

$$\zeta_1(s) = -\ln(s-1) - \ln\ln 2 + \int_1^{(s-1)\ln 2} \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt + \int_1^\infty \frac{dt}{te^t} +$$
$$+ \int_2^3 \left(\frac{1}{2^s \ln 2} - \frac{1}{x^s \ln x}\right) dx + \sum_{n,k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{a_{k,n+2}(s)}{(k+1)!\,(n+2)^{s+k} \ln(n+2)}. \tag{17}$$

Нетрудно также показать, что аналитическая функция (16) представляется рядом

$$\int_2^3 \left(\frac{1}{2^s \ln 2} - \frac{1}{x^s \ln x}\right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{a_{k,2}(s)}{(k+1)!\,2^{s+k} \ln 2},$$

а потому соотношение (17) принимает вид

$$\zeta_1(s) = -\ln(s-1) + \varphi(s) + \sum_{n,k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{a_{k,n+1}(s)}{(k+1)!\,(n+1)^{s+k} \ln(n+1)}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Теорема доказана полностью.

Замечание. Пользуясь (5), легко получить аналитическое представление функции $\zeta_1(s)$ в области $\operatorname{Re} s > -1$. В самом деле, из (5) получаем

$$\zeta_1(s) = -\ln(s-1) + \varphi(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{1,n+1}(s)}{2!\,(n+1)^{s+1} \ln(n+1)} +$$

$$+ \sum_{n,k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{a_{k+1,n+1}(s)}{(k+2)!\,(n+1)^{s+k+1} \ln(n+1)} = -\ln(s-1) + \varphi(s) +$$

$$+ \frac{s}{2!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{s+1} \ln(n+1)} + \frac{1}{2!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{s+1} \ln^2(n+1)} +$$

$$+ \sum_{n,k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{a_{k+1,n+1}(s)}{(k+2)!\,(n+1)^{s+k+1} \cdot \ln(n+1)} = -\ln(s-1) + \varphi(s) +$$

$$+ \frac{s}{2} \cdot \zeta_1(s+1) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{s+1} \ln^2(n+1)} +$$

$$+ \sum_{n,k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{a_{k+1,n+1}(s)}{(k+2)!\,(n+1)^{s+k+1} \ln(n+1)}. \tag{18}$$

На основании (5), во-первых, заключаем, что функция $\zeta_1(s+1)$ — аналитическая в области $\operatorname{Re} s > -1$ с логарифмическим полюсом в точке $s = 0$, который в соотношении (18) погашается нулем сомножителя $\frac{s}{2}$, а потому функция $\frac{s}{2} \cdot \zeta_1(s+1)$ является аналитической в области $\operatorname{Re} s > -1$.

Рассматривая, во-вторых, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{s+1} \ln^2(n+1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{s+1} \ln^2 n}, \tag{19}$$

видим, что он сходится на действительной оси для всех $s \geqslant 0$, что позволяет показать способом, аналогичным доказательству леммы, что функция $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x^{s+1} \ln^2 x}$, $\operatorname{Re} s > 0$ аналитически продолжается на всю плоскость без каких-либо особенностей в конечной ее части. Это в свою очередь позволяет предложенным здесь методом функцию, определенную при $\operatorname{Re} s > 0$ рядом (19), аналитически продолжить (также не встречая особенностей) на всю конечную плоскость.

Наконец, в-третьих, двойной ряд в соотношении (18) сходится абсолютно и равномерно при $\operatorname{Re} s > -1$.

Следовательно, на основании (18) можно получить аналитическое представление $\zeta_1(s)$ в области $\operatorname{Re} s > -1$ с единственной логарифмической особенностью в точке $s = 1$.

Аналогично можно продолжить $\zeta_1(s)$ на полуплоскость $\operatorname{Re} s > -2$ и т. д.

В заключение выражаю признательность В. К. Дзядыку за постоянное внимание при обсуждении полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Бурлаченко, Об одном способе аналитического продолжения дзета-функции Римана, УМЖ, т. 20, № 2, 1968.
2. А. И. Маркушевич Теория аналитических функций, т. 1, «Наука», М., 1967.

Поступила 12.VI 1972 г.
Полтавский педагогический институт