УДК 51.01+519.5

Об операторе границы в булевых алгебрах с замыканием

Ю. Р. Гайда, А. Э. Еременко

В работе [1] К. Куратовский показал, что топологию на множестве можно задать при помощи оператора замыкания, который определяется следующими аксиомами:

1°) $(A \cup B)^r = A^r \dot{\cup} B^r$;

2°) $A \subset A^r$;

3°) $A^{rr} = A^r$;

4°) $0^r = 0$,

а также доказал, что, применяя к произвольному множеству только операции дополнения и замыкания в произвольной последовательности, можно получить не больше 14 попарно различных множеств, и исследовал все возможные включения между этими множествами (см. также [2, стр. 48]).

М. Зарицкий [3] изучал оператор границы

$$A^{f} = A^r \cap A^{cr} \tag{1}$$

и доказал, что при помощи операций границы и дополнения можно получить из данного множества не более 6 различных множеств.

Возникает вопрос о том, сколько различных множеств можно получить из данного, применяя все три оператора (замыкание, дополнение и граница) в любой последовательности.

Пусть дана произвольная булева алгебра $\mathfrak{A}$. Обозначим через 0 и 1 соответственно нуль и единицу булевой алгебры, а через A^c — дополнение элемента $A \in \mathfrak{A}$. Пусть r — унарная операция, удовлетворяющая системе аксиом 1°) — 4°); операция f определяется формулой (1).

Докажем следующую теорему.

Т е о р е м а. *Применяя операторы f, c, r в произвольной последовательности к элементу $A \in \mathfrak{A}$, можно получить не более 34 разных элементов, в том числе* 0 *и* 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим несколько соотношений:

$$A^{rcrcrcr} = A^{rcr} \text{ (см. [1, 2]);} \tag{2}$$

$$A^{rfcr} = 1 \tag{3}$$

(действительно, $A^{rfcr} = (A^r \cap A^{rcr})^{cr} = A^{rcr} \cup A^{rcrcr} \supset A^{rcr} \cup A^{rcrc} = 1$);

$$A^{fr} = A^f; \tag{4}$$

$$A^{cf} = A^f \tag{5}$$

((4), (5) следуют непосредственно из (1));

$$A^{rcrf} = A^{rcrcrf} \tag{6}$$

(действительно, $A^{rcrcrf} = A^{rcrcr} \cap A^{rcrcrcr} = A^{rcrcr} \cap A^{rcr} = A^{rcrf}$);

$$A^{rff} = A^{rf} \text{ (см. [3]);} \tag{7}$$

$$A^{fff} = A^{ff} \text{ (см. [2, стр. 61]).} \tag{8}$$

Переходим к доказательству теоремы. Применяя к исходному элементу A каждый из трех операторов, получим A^r, A^c, A^f. Если дальше действовать только операциями r и c, то, исходя из A^r и A^c, получим всего 14 элементов (см. [1]):

$$A, A^r, A^{rc}, A^{rcr}, A^{rcrc}, A^{rcrcr}, A^{rcrcrc}, A^c, A^{cr}, A^{crc}, A^{crcr}, A^{crcrc}, A^{crcrcr}, A^{crcrcrc}. \tag{9}$$

Применяя же операции r и c к A^f, получим 6 элементов:

$$A^f, A^{fc}, A^{fcr}, A^{fcrc}, A^{fcrcr}, A^{fcrcrc}, \tag{10}$$

так как в силу (2) и (4) имеем: $A^{fcrcrcr} = A^{frcrcrcr} = A^{frcr} = A^{fcr}$.

Будем действовать на полученные 20 элементов операцией f. Получим 6 новых элементов:

$$A^{rf}, A^{rcrf}, A^{crf}, A^{crcrf}, A^{ff}, A^{fcrf}. \tag{11}$$

В самом деле, те из указанных 20 элементов (см. (9) и (10)), где последней операцией было c, можно не рассматривать в силу (5). Из элементов A^{rcrcr} и A^{crcrcr}, действуя операцией f, новых элементов по сравнению с (11) не получим в силу (6), а $A^{fcrcrf} = A^{frcrcrf} = A^{frcrf} = A^{fcrf}$ вследствие (4) и (6).

Очевидно, действие операций r и c на элементы (9) и (10) не дает новых элементов (по определению групп элементов (9) и (10)); действие же операции r на элементы (11) не приводит к новым элементам в силу (4). Применяя c к (11), получим еще 6 элементов:

$$A^{rfc},\ A^{ffc}.\ A^{rcrfc},\ A^{crfc},\ A^{crcrfc},\ A^{fcrfc}. \tag{12}$$

Если теперь применить операцию f, новых элементов не получим, по отношению к (11) — в силу (7) и (8), по отношению к (12) — в силу (5).

Применяя снова операцию r, получим лишь один новый элемент: 1 из любого элемента из (12) в силу (3). Осталось применить операции c или f к 1 и получить последний новый элемент: 0. Итак, получили 34 элемента.

Докажем включения, имеющие место между этими элементами в общем случае.

Включения $A^{rc} \subset A^{c} \subset A^{cr}$, $A^{rcrcrc} \subset A^{rcr} \subset A^{crcrcr} \subset A^{cr}$, $A^{rc} \subset A^{rcrcrc} \subset \subset A^{crcrc} \subset A^{crcrcr}$, $A^{crcrcrc} \subset A^{crcr} \subset A^{rcrcr} \subset A^{r}$, $A^{crc} \subset A^{crcrcrc} \subset A^{rcrc} \subset A^{rcrcr}$, $A^{crc} \subset A \subset A^{r}$ доказаны в [1]; $A^{ff} \subset A^{f}$, $A^{fc} \subset A^{ffc}$ доказаны в [3]. Мы будем их использовать при доказательстве остальных включений.

Из (1) вытекают включения:

$$A^{f} \subset A^{r},\ A^{f} \subset A^{cr},\ A^{rf} \subset A^{rcr},\ A^{rcrf} \subset A^{rcrcr},\ A^{ff} \subset A^{fcr},\ A^{crf} \subset A^{crcr},$$

$$A^{crcrf} \subset A^{crcrcr},\ A^{fcrf} \subset A^{fcrcr}.$$

Из $A^{f} \subset A^{cr}$, $A^{f} \subset A^{r}$, аксиомы 2^{0} и $A \subset B \Rightarrow B^{c} \subset A^{c}$ имеем:

$$A^{fcrc} \subset A^{fcrcr},\ A^{rcr} \subset A^{fcr},\ A^{fcrcr} \subset A^{rcrcr},\ A^{fcrcr} \subset A^{crcrcr}.$$

Далее, из $A^{fcr} = (A^{r} \cap A^{cr})^{cr} = A^{rcr} \cup A^{crcr}$ следует, что $A^{crcr} \subset A^{fcr}$. Применив $A^{rcrcr} \subset A^{r}$ к A^{f}, и учтя (4), получим: $A^{fcrcr} \subset A^{f}$.

Далее, $A^{fcrf} \subset A^{ff}$ следует из $A^{fcrf} = A^{fcr} \cap A^{fcrcr}$, $A^{ff} = A^{f} \cap A^{fcr}$ и $A^{fcrcr} \subset A^{f}$.

Включения $A^{rcrf} \subset A^{rf}$, $A^{crcrf} \subset A^{crf}$ справедливы, так как

$$A^{rf} = A^{r} \cap A^{rcr} \supset A^{r} \cap A^{rcr} \cap A^{rcrcr} = A^{rcr} \cap A^{rcrcr} = A^{rcrt}.$$

Включения $A^{rf} \subset A^{ff}$, $A^{crf} \subset A^{ff}$ следуют из

$$A^{rf} = A^{r} \cap A^{rcr} \subset A^{r} \cap A^{rcr} \cap A^{cr} \subset A^{r} \cap A^{cr} \cap$$

$$\cap\ (A^{rcr} \cup A^{crcr}) = A^{f} \cap A^{fcr} = A^{ff}.$$

Кроме того, между упомянутыми 34 элементами имеются включения, следующие из доказанных по правилу $A \subset B \Rightarrow B^{c} \subset A^{c}$ и по транзитивности.

Следующий пример показывает, что, вообще говоря, все 34 полученных выше элемента различны и в общем случае между ними выполняются только те включения, которые нами доказаны.

Возьмем в качестве булевой алгебры $\mathfrak{A}$ множество всех подмножеств действительной прямой с определенными естественным образом операциями суммы, произведения, дополнения и замыкания. За A возьмем множество

$$A = (0, 1) \cup (1, 2] \cup \{Q \cap (2, 3)\} \cup \{4\} \cup [5, 6],$$

где Q — множество рациональных чисел. Непосредственная проверка показывает, что множество A обладает всеми нужными свойствами.

Авторы искренне благодарят А. А. Гольдберга за предложенную тему и ряд полезных указаний

ЛИТЕРАТУРА

1. C. Kuratowski, Sur l'opération $\overline{A}$ de l'Analysis Situs, Fundamenta Mathematicae, Vol. 111, 1922, 182—199.
2. К. Куратовский, Топология, т. 1, «Мир», М., 1966.
3. Miron Zarycki, Quelques notions fondamentales de l'Analysis Situs on point de vue de l'Algèbre de la Logique, Fund. Math., **9**, 1927, 3—15.

Поступила 13.XI 1972 г.

Львовский государственный университет