УДК 517.949.2

Усреднение в дифференциальных уравнениях с асимптотически большим запаздыванием

М. М. Константинов

В данной работе обоснована схема усреднения для некоторых классов дифференциальных уравнений с асимптотически большим запаздыванием.

Рассмотрим начальную задачу

$$\dot{x}(t) = \varepsilon X(t, x(t), x(t - \Delta(t, \varepsilon))), t \in I = (0, \infty), \tag{1}$$

$$x(t) = \varphi(t), \ t \in J = (-\infty, 0], \tag{2}$$

где $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $X = (X^1, \ldots, X^n)$, а $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Функция $\Delta(t, \varepsilon)$ определена, непрерывна по t, ε и неотрицательна при $t \in I$. Без ограничения общности примем, что $\varphi(0) = 0$.

Уравнению (1) ставим в соответствие усредненное уравнение

$$\dot{\xi}(t) = \varepsilon X_0(\xi(t)); \ \xi(0) = 0, \tag{3}$$

где

$$X_0(\xi) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, \xi, \xi)\, dt. \tag{4}$$

Далее, будем предполагать, что функция $X(t, x, y)$ определена при $(t, x, y) \in Q = I \times H \times G$. Здесь $G = H \cup G_1$ и $H = \{x : |x| \leqslant h\}$, $G_1 = \bigcup_{t=-\infty}^{0} \{\varphi(t)\}$, где $|\cdot|$ — некоторая норма в R^n.

Теорема. *Пусть выполнены условия:*

1) *функция* $X(t, x, y)$ *равномерно ограничена*

$$\sup\{|X(t, x, y)| : (t, x, y) \in Q\} \leqslant B < \infty;$$

2) *в области* Q *функция* $X(t, x, y)$ *непрерывна по* t *и удовлетворяет условиям Липшица по* x *и* y

$$|X(t, x, y) - X(t, x_1, y_1)| \leqslant \lambda(|x - x_1| + |y - y_1|);$$

3) *множество*

$$I_0 = I \cap \{t : t - \Delta(t, \varepsilon) \leqslant 0, t \in I\}$$

имеет конечную меру: $\mu = \operatorname{mes} I_0 < \infty$;

4) *для каждого* $L > 0$ *существует предел*

$$\lim \varepsilon^2 \int_{I^*} \Delta(t, \varepsilon)\, dt = 0; \ \ I^* = I^\varepsilon \setminus I_0, \ \ I^\varepsilon = [0, L\varepsilon^{-1}];$$

5) *предел* (4) *существует равномерно относительно* ξ *и* $X_0(\xi) \in H$ *для каждого* $\xi \in H$.

Тогда для каждых $\delta > 0$ *и* $L > 0$ *существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что при* $\varepsilon < \varepsilon_0$ *имеет место неравенство*

$$|x(t) - \xi(t)| < \delta, \qquad t \in I^\varepsilon,$$

где $x(t)$ *и* $\xi(t)$ — *решения задач Коши* (1) — (3).

Доказательство. Отметим прежде всего, что в силу условий 1) и 2) задачи Коши для уравнений (1) и (3) удовлетворяют условиям существования и единственности решения на интервале I при каждом конечном ε.

Пусть $y(t)$ — решение уравнения $\dot{y}(t) = \varepsilon X(t, y(t), y(t))$, $y(0) = 0$.

Покажем, что для каждых $\delta_1 > 0$ и $L > 0$ существует $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\delta_1)$, такое, что $|x(t) - y(t)| < \delta_1$, $t \in I^\varepsilon$, $\varepsilon < \varepsilon_1$.

Действительно, запишем $x(t)$ и $y(t)$ в эквивалентной форме

$$x(t) = \begin{cases} \varepsilon \int\limits_0^t X(s, x(s), \ \ x(s - \Delta(s, \varepsilon)))\, ds, \ t \in I^\varepsilon, \\ \varphi(t), \ \ t \in J, \end{cases}$$

$$y(t) = \varepsilon \int_0^t X(s, y(s), y(s))\, ds, \ \ t \in I^\varepsilon.$$

Тогда

$$|x(t) - y(t)| \leqslant \varepsilon\lambda \int_0^t (|x(s) - y(s)| + |x(s - \Delta(s, \varepsilon)) - y(s)|)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon\lambda \int_0^t |x(s) - y(s)|\, ds + \varepsilon\lambda \int_0^t |x(s - \Delta(s, \varepsilon)) - x(s)|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon\lambda \int_0^t |x(s) - y(s)|\, ds + \varepsilon\lambda\mu M + \varepsilon^2\lambda B \int_{I^*} \Delta(s, \varepsilon)\, ds,$$

где $M = \sup\{|x(s - \Delta(s, \varepsilon)) - x(s)| : s \in J_0\}$.

Из условия 4) теоремы следует, что для некоторого $\varepsilon_1' > 0$ имеет место неравенство $\varepsilon_1'^2 \int\limits_{I^*} \Delta(s, \varepsilon)\, ds < \frac{1}{2} \delta_1 (\lambda B e^{2\lambda L})^{-1}$.

Пусть $\varepsilon_1 < \min\{\varepsilon_1', \varepsilon_1''\}$, где $\varepsilon_1'' = \frac{1}{2}\delta_1(\lambda\mu M e^{2\lambda L})^{-1}$. Тогда из леммы Гронуолла — Беллмана следует $|x(t) - y(t)| < \delta_1$, $t \in I^\varepsilon$, что и требовалось показать.

С другой стороны, для каждых $\delta_2 > 0$ и $L > 0$ существует $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\delta_2)$ такое, что $|y(t) - \xi(t)| < \delta_2$, $t \in I^\varepsilon$, при $\varepsilon < \varepsilon_2$. Это является следствием первой теоремы Н. Н. Боголюбова в формулировке Красносельского — Крейна [1].

Выбирая теперь $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*\}$, где $\varepsilon_i^* = \varepsilon_i\left(\frac{\delta}{2}\right)$, и используя неравенство треугольника получаем утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е 1. Одно из существенных условий теоремы является условие 4). В связи с этим представляется интересным найти различные классы функций $\Delta(t, \varepsilon)$, для которых это условие выполняется. Некоторые из этих классов, определенных при помощи асимптотических оценок, есть:

$$K_1 = \{\Delta : \Delta(t, \varepsilon) = O(1),\ t \to \infty\},$$

$$K_2 = \{\Delta : \Delta(t, \varepsilon) = O(t^\nu \ln^a t),\ t \to \infty;\ 0 \leqslant \nu < 1,\ a > 0\},$$

$$K_3 = \{\Delta : \Delta(t, \varepsilon) = O(t \ln^b t),\ t \to \infty;\ b < 0\}.$$

В случае, когда $\Delta \in K_1$, результат теоремы известен (см., например, [2, 3]). С другой стороны, нетрудно увидеть, что $K_1 \subset K_2 \subset K_3$; $K_1 \neq K_2 \neq K_3$.

Отметим, что для класса функций $K_4 = \{\Delta : \Delta(t, \varepsilon) = O(t), t \to \infty\}$ условие 4) уже не имеет место.

З а м е ч а н и е 2. Аналогичным образом можно обосновать схему усреднения для уравнений сверхнейтрального типа, например:

$$\dot{x}(t) = \varepsilon X(t, x(t), x_\Delta(t),\ \dot{x}(t),\ \dot{x}_\tau(t)),$$

где $x_\Delta(t) = x(t - \Delta(t, x(t),\ x(t)))$, $x_\tau(t) = x(t - \tau(t, x(t),\ \dot{x}(t)))$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. К р а с н о с е л ь с к и й, С. Г. К р е й н, О принципе усреднения в нелинейной механике, УМН, т. 10, № 3(65), 1955.
2. В. И. Ф о д ч у к, Метод усреднения для дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа, УМЖ, т. 20, № 2, 1968.
3. А. Н. Ф и л а т о в, Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях, «Фан», Ташкент, 1971.

Поступила 15.X 1973 г.

София, Высший машинно-электротехнический институт