УДК 519.41/47

Конечные элементарные недисперсивные группы

Н. Ф. Кузенный

В данной заметке рассматриваются конечные элементарные недисперсивные группы (см. определение 2). Значение элементарных недисперсивных групп определяется теоремами 1 и 2, дающими их полное описание. Оказалось, что понятие конечной элементарной недисперсивной группы тесно связано с понятием минимального цикла строгой нормализуемости (см. определение 4 и теорему 2). В работе приводятся некоторые предложения, характеризующие минимальный цикл строгой нормализуемости, имеющие самостоятельный интерес.

Приведем основные обозначения и определения: G — конечная группа; $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — различные простые числа; P_i — некоторая фиксированная силовская p_i-подгруппа группы G; $A \lhd G$ — подгруппа A инвариантна в группе G; $G = A \leftthreetimes B$ — полупрямое разложение группы G с инвариантной подгруппой A; $N_A(B)$ — нормализатор подгруппы B в подгруппе A.

Определение 1. Конечную группу G назовем дисперсивной, если она обладает инвариантным рядом, факторы которого примарны по различным простым числам.

Предложение 1. Пусть группа $G = (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)(B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $A_i \lhd G$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $A_iB_i = P_i$ — силовская p_i-подгруппа группы G;

2) подгруппа A_iB_j, $j \neq i - 1$, нильпотентна, а подгруппа $A_i \leftthreetimes B_{i-1}$ ненильпотентна, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, причем, если $i = 1$, то подгруппу B_{i-1} считают совпадающей с подгруппой B_n.

Тогда ни одна силовская подгруппа группы G не инвариантна в G и потому G — недисперсивная группа.

Определение 2. Группу $G = (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)(B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n)$, удовлетворяющую условиям предложения 1, будем называть элементарной недисперсивной группой.

Предложение 2. Силовские p_i-подгруппы элементарной недисперсивной группы не могут быть циклическими.

Определение 3. Пусть A, B — пара подгрупп некоторой группы G. Будем говорить, что эта пара подгрупп обладает свойствами нормализуемости, строгой нормализуемости, взаимной нормализуемости, если имеют место соответственно следующие соотношения:

$$A \subseteq N_G(B); \tag{1}$$

$$A \subseteq N_G(B) \text{ и } B \not\subseteq N_G(A); \tag{2}$$

$$A \subseteq N_G(B) \text{ и } B \subseteq N_G(A). \tag{3}$$

Если имеет место соотношение (1) (соответственно (2) и (3)), то будем говорить также, что подгруппа A нормализует подгруппу B (соответственно A строго нормализует B и A нестрого нормализует B).

Лемма. *Пусть $G = P_1P_2$ — бипримарная конечная группа, $\{P_1, P_2\}$ — ее силовская база, и пусть B, C — такие подгруппы группы G,* что *B нормализует P_1, P_1 нормализует C и $BC = P_2$. Тогда для дисперсивности группы G необходимо и достаточно, чтобы по меньшей мере одна из подгрупп $P_1 \times B$ и $C \times P_1$ была нильпотентной группой.*

Определение 4. Бипримарная ненильпотентная группа $G = P_1 \leftthreetimes P_2$ порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$ называется дисперсивной группой типа (p_1, p_2).

Теорема 1. *Пусть $G = (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)(B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n)$ — конечная элементарная недисперсивная группа. Тогда группа G вкладывается в группу $\overline{G} = \overline{D}_1 \times \overline{D}_2 \times \ldots \times \overline{D}_n$, где $\overline{D}_i$ — дисперсивная группа типа (p_i, p_{i-1}), изоморфная группе P_iP_{i-1}/A_{i-1} $(i = 1, 2, \ldots, n)$, причем, если $i = 1$, то подгруппа P_{i-1} (соответственно число p_{i-1}) считается совпадающей с подгруппой P_n (соответственно с числом p_n). Группа G и всякая ее недисперсивная подгруппа являются элементарными недисперсивными группами.*

Определение 5. Непустая конечная система Σ подгрупп группы G называется минимальным циклом строгой нормализуемости, если она удовлетворяет следующим условиям.

1. Для всякой подгруппы $A_i \in \Sigma$ найдется единственная подгруппа из Σ, называемая предшествующей, строго нормализующая подруппу A_i. Эту подгруппу будем обозначать через A_{i-1}.

2. Для всякой подгруппы $A_i \in \Sigma$ найдется единственная подгруппа из Σ, называемая последующей, которая строго нормализуется подгруппой A_i. Эту подгруппу будем обозначать через A_{i+1}.

Подгруппы A_i, A_{i+1} и A_{i-1}, A_i будем называть соседними, а подгруппы A_{i-1}, A_{i+1} соседними с A_i.

3. Две несоседние подгруппы Σ обладают свойством взаимной нормализуемости.

4. Никакая собственная подсистема Σ не удовлетворяет условиям 1—3.

Замечание 1. В этом определении $i = 1, 2, \ldots, n$, причем, если $i = 1$ (соответственно $i = n$), то подгруппа A_{i-1} (соответственно A_{i+1}) считается совпадающей с подгруппой A_n (соответственно A_1).

Предложение 3. Пусть $\Sigma = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ — минимальный цикл строгой нормализуемости, и пусть $\Sigma^* = \{A_1^*, A_2^*, \ldots, A_n^*\}$ — такая система подгрупп группы G, что $A_i^* \subseteq A_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Система Σ^* тогда и только тогда является минимальным циклом строгой нормализуемости, когда для любой подгруппы A_i^* подгруппа A_{i-1}^* строго нормализует A_i^*, и любые две несоседние подгруппы Σ^* обладают свойством взаимной нормализуемости.

Замечание 2. Отметим, что если в условии предложения 3 свойство взаимной нормализуемости подгрупп A_i, A_j, $j \neq i+1$, $i-1$, заменить условием $A_i \cap A_j = 1$, то предложение останется справедливым.

Предложение 4. Пусть $\Sigma = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ — минимальный цикл строгой нормализуемости, и пусть $\overline{\Sigma} = \{\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n\}$, где $\overline{A}_i = A_iN/N$, $N \lhd G$. Система $\overline{\Sigma}$ тогда и только тогда является минимальным циклом строгой нормализуемости, когда для любой подгруппы $\overline{A}_i$ подгруппа $\overline{A}_{i-1}$ строго нормализует $\overline{A}_i$.

Предложение 5. Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — силовская база группы G является минимальным циклом строгой нормализуемости. Тогда имеют место следующие утверждения:

1) если $P_1^*, P_2^*, \ldots, P_n^*$ — силовская база подгруппы H группы G, у которой любая пара подгрупп P_{i-1}^*, P_i^* обладает свойством нормализуемости и по крайней мере одна из этих пар не обладает свойством строгой нормализуемости, то H — дисперсивная группа;

2) фактор-группа $\overline{G} = G/N = \overline{P}_1\overline{P}_2 \ldots \overline{P}_n$, совпадающая с произведением своих силовских подгрупп $\overline{P}_i = P_iN/N$, дисперсивна, если по крайней мере одна пара подгрупп $\overline{P}_{i-1}, \overline{P}_i$ не обладает свойством строгой нормализуемости.

В этом предложении $i = 1, 2, \ldots, n$, и причем, если $i = 1$, то подгруппу P_{i-1} считают совпадающей с подгруппой P_n.

Теорема 2. *Конечная не бипримарная группа G является элементарной недисперсивной группой тогда и только тогда, когда силовские p_i-подгруппы P_i ее произвольной силовской базы составляют минимальный цикл строгой нормализуемости.*

Поступила 1.VII 1974 г.
Институт математики АН УССР