УДК 539.3

К общему решению пространственной задачи теории упругости для среды, обладающей криволинейной трансверсальной изотропией

В. П. Мальханов

В работах [1, 2] рассматривалась задача об общих решениях уравнений равновесия теории упругости в перемещениях для сферической и цилиндрической трансверсально изотропных сред. При этом как форма уравнений, так и их решения зависели от системы координат.

В данной заметке предлагается получение с использованием ковариантного дифференцирования общего решения уравнений равновесия для трансверсально изотропной среды, отнесенной к криволинейной системе координат общего вида, в инвариантной форме.

Уравнения равновесия запишем в виде

$$S_{11}u_1+S_{12}u_2+S_{13}u_3=0 \quad S_{21}u_1+S_{22}u_2+S_{23}u_3=0, \quad S_{31}u_1+S_{32}u_2+S_{33}u_3=0, \quad (1)$$

где

$$S_{11}=c_{11}\nabla_1\nabla_1+c_{44}\nabla_3\nabla_3+c_{44}\nabla_2\nabla_2, \quad S_{12}=(c_{12}+c_{44})\nabla_1\nabla_2=S_{21},$$

$$S_{13}=(c_{44}+c_{12})\nabla_1\nabla_3=S_{31}, \quad S_{22}=c_{44}\nabla_1\nabla_1+c_{22}\nabla_2\nabla_2+\frac{c_{22}-c_{23}}{2}\nabla_3\nabla_3,$$

$$S_{23}=S_{32}=\frac{c_{22}+c_{23}}{2}\nabla_2\nabla_3, \quad S_{33}=c_{44}\nabla_1\nabla_1+\frac{c_{22}-c_{23}}{2}\nabla_2\nabla_2+c_{23}\nabla_3\nabla_3,$$

а c_{ij} — упругие постоянные, ∇_k — ковариантные производные.

Операторы S_{ij}, составленные из ∇_k, являются коммутативными, потому что, как известно [3], $\nabla_i\nabla_k=\nabla_k\nabla_i$. Используя на основании этого метод А. И. Лурье [4], получим решение системы (1) в виде

$$u_1=\begin{vmatrix} S_{22} & S_{23} \\ S_{32} & S_{33}\end{vmatrix}F_1+\begin{vmatrix} S_{13} & S_{12} \\ S_{33} & S_{32}\end{vmatrix}F_2+\begin{vmatrix} S_{12} & S_{13} \\ S_{22} & S_{23}\end{vmatrix}F_3,$$

$$u_2=\begin{vmatrix} S_{23} & S_{21} \\ S_{33} & S_{31}\end{vmatrix}F_1+\begin{vmatrix} S_{11} & S_{13} \\ S_{31} & S_{33}\end{vmatrix}F_2+\begin{vmatrix} S_{13} & S_{11} \\ S_{23} & S_{21}\end{vmatrix}F_3,$$

$$u_3=\begin{vmatrix} S_{21} & S_{22} \\ S_{31} & S_{32}\end{vmatrix}F_1+\begin{vmatrix} S_{12} & S_{11} \\ S_{32} & S_{31}\end{vmatrix}F_2+\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22}\end{vmatrix}F_3,$$

где F_i — решения уравнения

$$(S_{11}S_{22}S_{33}+S_{12}S_{23}S_{31}+S_{21}S_{32}S_{13}-S_{13}S_{22}S_{31}-S_{32}S_{23}S_{11}-$$
$$-S_{21}S_{12}S_{33})F_i=0 \qquad (i=1,2,3).$$

При переходе к изотропному случаю операторы S_{ij} примут значения S'_{ij}:

$$S'_{11}=c_{11}\nabla_1\nabla_1+(c_{11}-c_{12})(\nabla_2\nabla_2+\nabla_3\nabla_3), \quad S'_{12}=S'_{21}=(c_{11}+c_{12})\nabla_1\nabla_2,$$

$$S'_{13}=S'_{31}=(c_{11}+c_{12})\nabla_1\nabla_3, \quad S'_{22}=(c_{11}-c_{12})(\nabla_1\nabla_1+\nabla_3\nabla_3)+c_{11}\nabla_2\nabla_2,$$

$$S'_{23}=S'_{32}=(c_{11}+c_{12})\nabla_2\nabla_3, \quad S_{33}=(c_{11}-c_{12})(\nabla_1\nabla_1+\nabla_2\nabla_2)+c_{11}\nabla_3\nabla_3,$$

а форма решения сохранится неизменной.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Деев, В. П. Мальханов, Общее решение пространственной задачи теории упругости для криволинейной трансверсальной изотропной среды, УМЖ, т. 22, № 4, 1970.
2. В. М. Деев, В. П. Мальханов, К решению пространственной задачи теории упругости цилиндрически трансверсально изотропного тела, УМЖ, т. 23, № 1, 1971.
3. Л. И. Седов, Механика сплошной среды, т. 1, «Наука», М., 1970.
4. А. И. Лурье, К теории систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, Труды Ленинградского индустриального института, № 6, вып. 3, 1937.

Поступила 25.IX 1973 г.

Всесоюзный научно-исследовательский институт по охране вод