УДК 517.911

О необходимых и достаточных условиях продолжимости решений дифференциально-функциональных уравнений запаздывающего типа

В. П. Рудаков

В данной работе результат А. А. Ющенко [1] о необходимых и достаточных условиях продолжимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений распространяется на дифференциально-функциональные уравнения типа рассмотренных в работах [2—4] и др.

Будем пользоваться обозначениями: $I = [\alpha, T]$, $I_0 = [\beta, T)$, $I_\gamma = [\beta, \gamma]$ $(-\infty < \alpha \leqslant \beta < \gamma \leqslant T < \infty)$; E^n — n-мерное евклидово пространство, $\|\cdot\|$ — некоторая (фиксированная) его норма; C — пространство непрерывных на I функций со значениями в E^n, $\|\cdot\|^I$ — его норма $(\|\psi(s)\|^{[a,b]} = \sup\limits_{a \leqslant s \leqslant b} \|\psi(s)\|)$; C_G — множество всех функций из C со значениями во множестве $G \subset E^n$; $\Omega_0 = I_0 \times C$. Запись «$\psi(\cdot)$» после «t» означает сужение функции $\psi \in C$ на отрезок $[\alpha, t]$.

Пусть $F(t, \psi(\cdot))$ — функционал, относительно которого предполагается, что он:

I) определен на множестве $I_T \times C$ и имеет значения в E^n;

II) непрерывен по t на I_T при любой фиксированной функции $\psi \in C$;

III) удовлетворяет локальному условию Липшица по аргументу ψ, т. е. для каждого компакта $K \subset E^n$ существует такое число $L_K > 0$, что при всех (t, ψ), $(t, \bar\psi) \in I_T \times C_K$ выполняется неравенство

$$\|F(t, \psi(\cdot)) - F(t, \bar\psi(\cdot))\| \leqslant L_K \|\psi(s) - \bar\psi(s)\|^{[\alpha, t]}.$$

Рассмотрим задачу: найти решение уравнения

$$\dot x(t) = F(t, x(\cdot)) \tag{1}$$

с начальными данными $(t_0, \varphi) \in \Omega_0$. При этом под такого рода решением, определенным на $[\alpha, t_0 + h)$, где $0 < h \leqslant T - t_0$ (или на всем I), понимается непрерывная на $[\alpha, t_0 + h)$ (или, соответственно, на всем I) функция $x(t)$ со значениями в E^n, удовлетворяющая условию $x(t) \equiv \varphi(t)$ при $t \in [\alpha, t_0]$ и обращающая уравнение (1) в тождество по t при $t \in [t_0, t_0 + h)$ (или при $t \in [t_0, T]$).

Как известно (например, [4, теорема 2]), при выполнении для функционала F условий I)—III), каждой паре начальных данных $(t_0, \varphi) \in \Omega_0$ отвечает локально существующее единственное решение уравнения (1), которое обозначим через $x(t; t_0, \varphi(\cdot))$. Естественно возникает вопрос: какие, в дополнение к условиям I)—III), должны выполняться требования, чтобы все решения $x(t; t_0, \varphi(\cdot))$ были максимально продолжимы, т. е. продолжимы на весь данный отрезок I. Ниже дается исчерпывающий ответ на этот вопрос.

В дальнейшем используются функционалы Ляпунова—Красовского для уравнения (1). Так будем называть каждый функционал $V(t, \varphi(\cdot))$, определенный на множестве Ω_0, имеющий значения в E^1, неотрицательный, непрерывный по t на I_0 при любой фиксированной функции $\psi \in C$, удовлетворяющий сильнолокальному условию Липшица по аргументу ψ и имеющий неположительную верхнюю правую производную по t в силу уравнения (1), которую обозначим через $D^+_{(1)} V(t, \psi(\cdot))$. При этом функционал V удовлетворяет сильнолокальному условию Липшица по аргументу ψ, если для каждого числа $\gamma \in (\beta, T)$ и каждого компакта $Q \subset C$ можно указать число $L_{\gamma,Q} > 0$ такое, что

$$|V(t, \psi(\cdot)) - V(t, \overline{\psi}(\cdot))| \leqslant L_{\gamma,Q} \| \psi(s) - \overline{\psi}(s) \|^{[\alpha, t]}$$

для всех (t, ψ), $(t, \overline{\psi}) \in I_\gamma \times Q$. Под $D^+_{(1)}V$ понимается функционал, определенный на множестве Ω_0 следующим образом (ср. [4]):

$$D^+_{(1)}V(t, \psi(\cdot)) = \varlimsup_{\Delta t \to +0} \frac{V(t + \Delta t, \psi^*(\cdot)) - V(t, \psi(\cdot))}{\Delta t},$$

где

$$\psi^*(\xi) = \begin{cases} \psi(\xi) & \text{при } \alpha \leqslant \xi \leqslant t, \\ \psi(t) + F(t, \psi(\cdot))(\xi - t) & \text{при } t \leqslant \xi \leqslant T. \end{cases}$$

Наряду с этой, будем пользоваться производной

$$D^+V(t, \psi(\cdot)) = \varlimsup_{\Delta t \to +0} \frac{V(t + \Delta t, \psi(\cdot)) - V(t, \psi(\cdot))}{\Delta t},$$

которая также является функционалом, определенным на множестве Ω_0.

Будем говорить, что функционал Ляпунова — Красовского V допускает бесконечно большой низший предел, если можно указать скалярную неотрицательную непрерывную при $r \geqslant 0$ функцию $W(r)$, обладающую свойством: $W \to \infty$ при $r \to \infty$, такую, что

$$V(t, \psi(\cdot)) \geqslant W(\| \psi(t) \|) \tag{2}$$

при всех $(t, \psi) \in \Omega_0$.

Рассмотрим следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть $u(t)$ и $v(t)$ — непрерывные неотрицательные соответственно на I и на I_T функции, N — неотрицательная постоянная и $t_0 \in I_0$. Тогда из выполнения неравенств*

1) $u(t) \leqslant N$ *при* $\alpha \leqslant t \leqslant t_0$ *и*

2) $u(t) \leqslant N + \int\limits_{t_0}^{t} v(\tau) \sup\limits_{\alpha \leqslant s \leqslant \tau} u(s)\, d\tau$ *при* $t_0 \leqslant t \leqslant T$ *следует выполнение неравенства*

$$u(t) \leqslant N \exp \int\limits_{\alpha}^{T} v(\tau)\, d\tau \quad \text{при } t \in I.$$

Лемма 1 является некоторым следствием известной леммы Гронуолла — Беллмана.

Лемма 2. *Для каждого компакта $K \subset E^n$ существует число $M_K > 0$ такое, что*

$$\| F(t, \psi(\cdot)) \| \leqslant M_K$$

для всех $(t, \psi) \in I_T \times C_k$.

Это следует из условий I) — III).

Лемма 3. *Пусть решения $x(t) = x(t; t_0, \varphi(\cdot))$ и $\bar{x}(t) = x(t; \bar{t}_0, \varphi(\cdot))$ максимально продолжимы и принадлежат множеству C_K, где K — компакт в E^n. Тогда для всех $t \in I$ выполняется неравенство*

$$\| x(t) - \bar{x}(t) \| \leqslant (\omega(| t_0 - \bar{t}_0 |) + M_K | t_0 - \bar{t}_0 |) \exp L_K (T - \beta),$$

где ω — модуль непрерывности функции $\varphi(t)$ на отрезке I.

Справедливость этой леммы легко доказывается на основании лемм 1 и 2 в силу условий I)—III).

Лемма 4. *Пусть для каждой пары $(t_0, \varphi) \in \Omega_0$ решение $x(t; t_0, \varphi(\cdot))$ максимально продолжимо. Тогда, какова бы ни была пара $(\bar{t}_0, \bar{\varphi}) \in \Omega_0$, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\bar{t}_0, \bar{\varphi}, \varepsilon) > 0$, что для всех $t, \bar{t} \in I$ и всех $(t_0, \varphi) \in \Omega_0$, удовлетворяющих условию $|t - \bar{t}| < \delta$, $|t_0 - \bar{t}_0| < \delta$ и $\| \varphi(s) - \bar{\varphi}(s) \|^I < \delta$, выполняется неравенство $\| x(t; t_0, \varphi(\cdot)) - x(\bar{t}; \bar{t}_0, \bar{\varphi}(\cdot)) \| < \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $x_1(t) = x(t; t_0, \varphi(\cdot))$, $x_2(t) = x(t; t_0, \bar{\varphi}(\cdot))$, $x_3(t) = x(t; \bar{t}_0, \bar{\varphi}(\cdot))$. Справедливость неравенства

$$\| x_1(t) - x_3(\bar{t}) \| \leqslant \| x_1(t) - x_2(t) \| + \| x_2(t) - x_3(t) \| + \| x_3(t) - x_3(\bar{t}) \| \quad (3)$$

очевидна.

Пусть $x_i(t) \in C_K$ $(i = 1, 2, 3)$, где K — некоторый компакт в E^n. Тогда, во-первых, в силу леммы 2 работы [4] при всех $t \in I$ выполняется неравенство

$$\| x_1(t) - x_2(t) \| \leqslant \| \varphi(s) - \bar{\varphi}(s) \|^I \exp L_K (T - \beta). \quad (4)$$

Во-вторых, в силу леммы 3 при всех $t \in I$ выполняется неравенство

$$\| x_2(t) - x_3(t) \| \leqslant (\bar{\omega}(| t_0 - \bar{t}_0 |) + M_K | t_0 - \bar{t}_0 |) \exp L_K (T - \beta) \quad (5)$$

($\bar{\omega}$ — модуль непрерывности функции $\bar{\varphi}(t)$ на I). В-третьих, на основании леммы 2 устанавливается неравенство

$$\| x_3(t) - x_3(\bar{t}) \| \leqslant \bar{\omega}(| t - \bar{t} |) + M_K | t - \bar{t} |, \quad (6)$$

которое выполняется для всех t, $\bar{t} \in I$.

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и каждой паре $(\bar{t}_0, \bar{\varphi}) \in \Omega_0$ поставим в соответствие множество $K = \{x : x \in E^n, \ \| x \| \leqslant \| x_3(s) \|^I + \varepsilon\}$. Тогда, как это следует из неравенств (3) — (6), в качестве числа $\delta(\bar{t}_0, \bar{\varphi}, \varepsilon)$, о котором говорится в условии леммы, можно взять любое число такое, что

$$0 < \delta < \min \left\{ \frac{\varepsilon A_K}{3}, \quad \bar{\omega}^{-1}\left(\frac{\varepsilon A_K}{6}\right), \quad \frac{\varepsilon A_K}{6 M_K} \right\},$$

где $A_K = \exp L_K (\beta - T)$. Лемма доказана.

Теперь сформулируем и докажем основное утверждение.

Теорема. *Для того чтобы все решения уравнения (1) были максимально продолжимы, необходимо и достаточно, чтобы для уравнения (1) существовал функционал Ляпунова—Красовского, допускающий бесконечно большой низший предел.*

Доказательство. Достаточность. Пусть для уравнения (1) существует функционал Ляпунова—Красовского, допускающий бесконечно большой низший предел. Обозначим его через $V(t, \psi(\cdot))$.

Допустим, что некоторое решение $\widetilde{x}(t) = x(t; t_0, \varphi(\cdot))$ уравнения (1) непродолжимо на I. Пусть его наибольшим интервалом существования будет $[\alpha, \theta)$, где $t_0 < \theta \leqslant T$. Тогда (по теореме 3 из [4]) найдется последовательность $t_0 < t_1 < \ldots < t_l < \ldots \to \theta$ такая, что

$$\|\widetilde{x}(t_l)\| \to \infty \quad \text{при } l \to \infty. \tag{7}$$

Пусть $V_1(t) = V(t, \widetilde{x}(\cdot))$. Согласно свойству (2) и условию (7) найдется такое число $m_0 \geqslant 0$, что для всех $l > m_0$ члены последовательности $V_1(t_l)$ будут больше любого наперед заданного числа, например, $V(t_0, \varphi(\cdot))$. Тогда, если некоторое $l = m > m_0$, то

$$V_1(t_m) > V(t_0, \varphi(\cdot)). \tag{8}$$

С другой стороны, так как при всех $\xi \in [\alpha, \theta)$ и $t \in [t_0, \theta)$ $x(\xi; t, \widetilde{x}(\cdot)) = \widetilde{x}(\xi)$ (согласно теореме 1 из [4]), учитывая определение функционала Ляпунова — Красовского и следствие из определения его производных [4, стр. 415], находим, что

$$D^+V_1(t) = D^+V(t, \widetilde{x}, (\cdot)) = D^+_{(1)}V(t, \widetilde{x}(\cdot)) \leqslant 0$$

при всех $t \in [t_0, \theta)$. Следовательно, функция $V_1(t)$ не возрастает в промежутке $[t_0, \theta)$ и, в частности,

$$V_1(t_m) \leqslant V_1(t_0) = V(t_0, \varphi(\cdot)). \tag{9}$$

Противоречивость неравенств (8) и (9) и доказывает достаточность условия теоремы.

Необходимость. Пусть все решения $x(t; t_0, \varphi(\cdot))$ уравнения (1) максимально продолжимы. Тогда выражение $x(t; t_0, \varphi(\cdot))$ можно рассматривать как функционал, определенный на $I \times I_0 \times C$ и имеющий значения в E^n. Покажем, что функционал

$$V(t, \psi(\cdot)) = \|x(s; t, \psi(\cdot))\|^{[t, T]}$$

является для уравнения (1) функционалом Ляпунова — Красовского, допускающим бесконечно большой низший предел.

Очевидно, функционал V определен на множестве Ω_0, имеет значения в E^1 и неотрицателен.

Непрерывность функционала V по t на I_0 при любой фиксированной функции $\psi \in C$ установим следующим образом. В силу леммы 4 для каждого $\bar{t} \in I_0$ и каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\bar{t}, \varepsilon) > 0$, что при всех $\xi, \bar{\xi} \in I$ и всех $t \in I_0$, удовлетворяющих условию $|\xi - \bar{\xi}| < \delta$, $|t - \bar{t}| < \delta$, выполняется неравенство $\|x(\xi, t) - x(\bar{\xi}, \bar{t})\| < \varepsilon$, где $x(\xi, t) = x(\xi; t, \psi(\cdot))$. Тем более для таких значений (ξ, t) и $(\bar{\xi}, \bar{t})$

$$\|x(\xi, t)\| < \|x(\bar{\xi}, \bar{t})\| + \varepsilon. \tag{10}$$

Покажем, что для всех $t \in I_0$, удовлетворяющих условию $|t - \bar{t}| < \delta$, выполняется неравенство

$$V(t, \psi(\cdot)) < V(t, \psi(\cdot)) + \varepsilon. \tag{11}$$

Допустим противное, т. е. что для некоторого $t \in I_0$ из неравенства $|t-\bar{t}| < \delta$ следует неравенство $V(t, \psi(\cdot)) \geqslant V(\bar{t}, \psi(\cdot)) + \varepsilon$. Тогда, так как $V(t, \psi(\cdot))$ является одним из значений $\| x(s, t) \|$ на $[t, T]$, существует такое $s_1 \in [t, T]$, что неравенство $\| x(s_1, t) \| \geqslant V(\bar{t}, \psi(\cdot)) + \varepsilon \geqslant \| x(s, \bar{t}) \| + \varepsilon$ выполняется при всех $s \in [\bar{t}, T]$. В частности, оно выполняется и при некотором $s = s_2 \in [\bar{t}, T]$ таком, что $|s_1 - s_2| < \delta$. А это противоречит неравенству (10). Аналогично можно показать, что для всех $t \in I_0$, удовлетворяющих условию $|t - \bar{t}| < \delta$, выполняется неравенство

$$V(t, \psi(\cdot)) > V(\bar{t}, \psi(\cdot)) - \varepsilon. \tag{12}$$

Объединяя неравенства (11) и (12), получаем, что $|V(t, \psi(\cdot)) - V(\bar{t}, \psi(\cdot))| < \varepsilon$ как только $|t - \bar{t}| < \delta$. Непрерывность V по t на I_0 доказана.

Покажем, что функционал V удовлетворяет сильнолокальному условию Липшица по аргументу ψ. Пусть $\gamma \in (\beta, T)$ и Q — компакт в C. В силу леммы 4 решение $x(\xi; t, \psi(\cdot))$ непрерывно по (ξ, t, ψ) в области $I \times I_\gamma \times Q$. Поэтому найдется такое число $A > 0$, что при всех $(\xi, t, \psi) \in I \times I_\gamma \times Q$ выполняется неравенство $\| x(\xi; t, \psi(\cdot)) \| \leqslant A$. Пусть $K = \{x : x \in E^n, \| x \| \leqslant A\}$. Тогда для любых $(t, \psi), (t, \bar{\psi}) \in I_\gamma \times Q$ решения $x(\xi) = x(\xi; t, \psi(\cdot))$ и $\bar{x}(\xi) = x(\xi; t, \bar{\psi}(\cdot))$ принадлежат множеству C_K. Отсюда, в силу леммы 2 работы [4], при всех $\xi \in I$ выполняется неравенство

$$\| x(\xi) - \bar{x}(\xi) \| \leqslant L_{\gamma, Q} \| \psi(s) - \bar{\psi}(s) \|^{[\alpha, t]},$$

где $L_{\gamma, Q} = \exp L_K (T - \beta)$, а значит — и неравенство

$$| \| x(\xi) \| - \| \bar{x}(\xi) \| | \leqslant L_{\gamma, Q} \| \psi(s) - \bar{\psi}(s) \|^{[\alpha, t]}.$$

Пусть $V(t, \psi(\cdot)) \geqslant V(t, \bar{\psi}(\cdot))$. Тогда найдется такое $\tau \in [t, T]$, что $V(t, \psi(\cdot)) = \| x(\tau) \|$ и, следовательно,

$$| V(t, \psi(\cdot)) - V(t, \bar{\psi}(\cdot)) | = V(t, \psi(\cdot)) - V(t, \bar{\psi}(\cdot)) \leqslant$$
$$\leqslant \| x(\tau) \| - \| \bar{x}(\tau) \| = | \| x(\tau) \| - \| \bar{x}(\tau) \| |.$$

Аналогично, рассуждая в случае $V(t, \psi(\cdot)) < V(t, \bar{\psi}(\cdot))$, убеждаемся, что всегда

$$| V(t, \psi(\cdot)) - V(t, \bar{\psi}(\cdot)) | \leqslant L_{\gamma, Q} \| \psi(s) - \bar{\psi}(s) \|^{[\alpha, t]}.$$

Рассмотрим произвольное решение $x(\xi) = x(\xi; t, \psi(\cdot))$. Легко видеть, что при любых $s_1, s_2 \in [t, T)$, удовлетворяющих условию $s_1 < s_2$, выполняется неравенство $V(s_1, x(\cdot)) \geqslant V(s_2, x(\cdot))$. Следовательно, функция $V_2(s) = V(s, x(\cdot))$ не возрастает при $s \in [t, T)$, а значит при этих значениях s имеет место неравенство $D^+ V_2(s) \leqslant 0$. В силу уже установленных свойств функционала V при $s \in [t, T)$ выполняется тождество

$$D^+_{(1)} V(s, x(\cdot)) = D^+ V(s, x(\cdot)) = D^+ V_2(s).$$

Отсюда, в частности, при $s = t$ находим, что $D^+_{(1)} V(t, \psi(\cdot)) \leqslant 0$.

Наконец, покажем, что функционал V допускает бесконечно большой низший предел. Это свойство выполняется в силу очевидного неравенства

$$V(t, \psi(\cdot)) \geqslant \| x(t; t, \psi(\cdot)) \| \equiv \| \psi(t) \|,$$

т. е. в данном случае $W(r) \equiv r$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Ющенко, Функции Ляпунова и продолжение решений дифференциальных уравнений, Дифференц. уравнения, т. 4, № 6, 1968.
2. Н. Н. Красовский, Некоторые задачи теории устойчивости движения, ГИФМЛ, М., 1959.
3. А. Д. Мышкис, Замечание к статье Г. М. Жданова «О приближенном решении системы дифференциальных уравнений первого порядка с запаздывающим аргументом», УМН, т. 16, вып. 2(98), 1961.
4. R. D. Driver, Existence and stability of solutions of a delay-differential system, Archive for Rational Mechanics and Analysis, **10**, 5, 1962, 401—426.

Поступила 25.VI 1972 г.,
после переработки — 18.III 1974 г.
Симферопольский государственный университет