УДК 517.943.2

О существовании решений линейных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах и расслоениях

С. Н. Самборский

В заметке рассматриваются условия существования локальных решений систем (бесконечных) линейных дифференциальных уравнений первого порядка с неограниченными операторными коэффициентами. В п. 1 даются определения, в пп. 2 и 3 приводятся условия существования решений в случае, не охватываемом теоремой Фробениуса. Эти условия формулируются на языке струйных (джет —) расслоений (п. 6), вводятся нужные определения (п. 4) и, в качестве иллюстрации использования языка струй, формулируется классическая теорема Фробениуса (п. 5).

Полученные результаты могут быть использованы для уравнений в вариационных производных, правые части которых содержат, например, дифференциальные операторы.

1. Пусть E, B — банаховы пространства; B_+ — плотное в B линейное подпространство, являющееся банаховым в норме $\|\cdot\|_+$, более сильной, чем норма в B; $\mathbf{I}$ — оператор вложения B_+ в B.

Исследуемые уравнения имеют вид

$$D(\mathbf{I}y(x)) = A(x)\, y(x), \tag{1}$$

где $A(x) \in L(B_+, L(E, B))$ при каждом x из некоторого множества $U \subset E$, $A(x)$ будем предполагать дифференцируемым по x.

Решением уравнения (1) с начальным условием $y_0 \in B_+$ в области $U \subset E$, содержащей нуль и открытой без нуля, назовем отображение $y: U \to B_+$ такое, что $y(0) = y_0$, $\mathbf{I}y(x)$ дифференцируемо и $y(x)$ удовлетворяет в U уравнению (1).

Получение решений, как и в классическом случае ($\mathbf{B}_+ = \mathbf{B}$, см. [1, 2]), проводится построением обыкновенных дифференциальных уравнений «по направлениям» из U, т. е. уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t} V(t, x) = A(t, x)\, V(t, x), \tag{2}$$

где $A(t, x)\, y = A(tx)\, y \cdot x$ для $x \in U$.

Тогда решение (1) $y(x)$ равно $V(1, x)$. В случае уравнения (1) уравнение (2) имеет неограниченный переменный оператор справа (с постоянной областью определения и замкнутый). Даже в простейшем случае $A(x) \equiv A$

видим, что если и существует решение (2) в направлении x, то, вообще говоря, оно не существует в направлении $-x$ (по теореме Хилле — Иосиды [3]). Таким образом, можем получать решение не в окрестности нуля, а лишь в области, для которой 0 — граничная точка, например в конусе.

2. Теорема 1. *Пусть K — конус в E ($K\setminus\{0\}$—открыто) и для уравнения* (1) *выполнены следующие условия:*

а) *условие Фробениуса*

$$D_x A(x)\cdot y\cdot(s_1, s_2) - DA_x\cdot y\cdot(s_2, s_1) = A(x)(A(x)\cdot y\cdot s_2, s_1) - A(x)(A(x)\cdot y\cdot s_1, s_2) \tag{3}$$

на некотором плотном в B_+ множестве $\{y\}$ при любых $x\in U, s_1, s_2\in E$;

б) *задачи Коши для уравнений «по направлениям»* (2) *равномерно корректны и решения $v(t, x)$ непрерывно зависят от x (как отображения в B_+).*

Тогда уравнение (1) *имеет в U при каждом начальном условии единственное решение, непрерывно зависящее от этого условия.*

Доказательство. Из условия Фробениуса следует, что оператор $A(t, z)A^z(t, s) - A^z(t, s)A(t, z)$ продолжается до ограниченного оператора из B_+ в B ($A^z(t, s)\in L(B_+, B)$ и $A^z(t, s)y = A(tz)\cdot y\cdot s$). Этим же свойством обладает и оператор $C(t) = A^{-1}(t, z)A^z(t, s)A(t,z)$. Замыкая $C(t)$ в норме B_+, получим $\overline{A^{-1}(t, z)A^z(t, s)} = \overline{C(t)}A^{-1}(t, z)$ (черта над оператором слева обозначает замыкание в B, справа — в B_+). Так как $A^{-1}(t, z)\in L(B, B_+)$ и $C(t)\in L(B_+, B)$, то оператор $\overline{A^{-1}(t, z)A^z(t, s)}$ ограничен в B. Это, в частности, позволяет переписать условие Фробениуса (3) следующим образом:

$$\begin{aligned} A^{-1}(t, z)[DA(tz)\,y(s, z)] - A^{-1}(t, z)[DA(tz)\,y(z, s)] &= \\ = A^z(t, s)\,y - \overline{A^{-1}(t, z)A^z(t, s)}\,A(t, z)\,y. \end{aligned} \tag{4}$$

В этой записи, очевидно эквивалентной (3), y уже может быть любым вектором из B_+. (Мы предполагаем, что для оператора $A(t, z)$ 0 — регулярная точка. Если это не так, то все же найдется регулярная точка $\lambda > 0$, так как задача Коши для уравнения с $A(t, z)$ равномерно корректна и можно рассматривать $(A(t, z) - \lambda Id)^{-1}$).

Покажем, что из условия б) теоремы следует дифференцируемость $Iv(t, z)$ в норме B:

$$Iv(t, z+h) - Iv(t, z) = U(t, 0, z+h)\,y_0 - U(t, 0, z)\,y_0 =$$

$$= \int_0^t U(t, \tau, z)[A(\tau, z+h) - A(\tau, z)]\,U(\tau, 0, z+h)\,y_0 d\tau.$$

(Это равенство получается дифференцированием по τ $U(t, \tau, z)\,U(\tau, \nu, z+h)$ и последующим интегрированием (см. [3, стр. 233]), $U(t, \tau, x)$ — эволюционный оператор уравнения в направлении x.)

Рассмотрим линейный ограниченный оператор $\Lambda(t, z)$:

$$h\to\int_0^t U(t, \tau, z)\,D_2A(\tau, z)\,h\cdot U(\tau, 0, z)\,y_0 d\tau.$$

$$\frac{\|\mathbf{I}v(t, z+h) - \mathbf{I}v(t, z) - \Lambda(t, z)h\|}{\|h\|} =$$

$$= \left\| \int_0^t U(t,\tau,z) \left[\frac{A(\tau,z+h) - A(\tau,z) - D_2A(\tau,z)h}{\|h\|} \right] U\ \tau,0,z+h)\, y_0 d\tau \right\| +$$

$$+ \left\| \int_0^t U(t,\tau,z) \frac{D_2A(\tau,z)h}{\|h\|} [U(\tau,0,z+h) - U(\tau,0,z)]\, y_0 d\tau \right\| \to 0$$

при $\|h\| \to 0$ ввиду непрерывности $U(\tau,0,z+h)\,y_0$ по h в B_+. Далее, функция $A^{-1}(t,z)\,U(t,\tau,z)\,\varphi$ дифференцируема по t при любых фиксированных z, τ и $\varphi \in B$ и ее производная равна $[A^{-1}(t,z)]_t' U(t,\tau,z)\,\varphi + U(t,\tau,z)\varphi$. Действительно, если $\varphi \in \mathrm{I}B_+$, то это вытекает из равенства

$$(U(t,\tau,z)\,\varphi)_t' = A(t,z)\,U(t,\tau,z)\,\varphi.$$

Пусть $\varphi_n \to \varphi$ и $\varphi_n \in \mathrm{I}B_+$. Последовательность функций $\psi_n(t) = A^{-1}(t,z)\,U(t,\tau,z)\,\varphi_n$ такова, что последовательность $\psi_n'(t)$ равномерно сходится к $[(A^{-1}(t,z))_t' + \mathrm{I}d]\,U(t,\tau,z)\,\varphi$ и, следовательно, можно применять предельный переход под знаком производной.

Используя это, можем продифференцировать по t

$$A^{-1}(t,z)\,(D_2(\mathrm{I}v(t,z))\,s) =$$

$$= \int_0^t A^{-1}(t,z)\,U(t,\tau,z)\,[D_2A(\tau,z)]\,s\cdot U(\tau,0,z)\,y_0 d\tau.$$

Получим

$$[A^{-1}(t,z)\,(D_2(\mathrm{I}y(t,z))\,s]_t' = [A^{-1}(t,z)]'\,(D_2(\mathrm{I}y(t,z))\,s) +$$

$$+ D_2(\mathrm{I}y(t,z))\,s + A^{-1}(t,z)\,(D_2A(t,z))\ s\cdot y(t,z). \tag{5}$$

Обозначим $g(t) = D_2(\mathrm{I}v(t,z))\,s$ и рассмотрим функцию

$$h(t) = A^{-1}(t,z)\,g(t) - tA^{-1}(t,z)\,A^z(t,s)\,v(t,z).$$

Используя (4) и (5), находим, что эта функция удовлетворяет уравнению

$$W'(t) = A(t,z)\,W(t) + A^{-1}(t,z)\,A'(t,z)\,W(t).$$

Так как $W(0) = 0$, операторная функция $A^{-1}(t,z)\,A'(t,z)$ сильно непрерывна и ее значения — ограниченные операторы из B_+ в B_+, то равенство $W(t) = 0$ (а значит, и $h(t) = 0$) при каждом $t \in [0,T]$ вытекает из следующей леммы.

Лемма. *Пусть равномерно корректна на* $[0,T]$ *задача Коши для уравнения*

$$y' = B(t)\,y \qquad (B(t) \in L(B_+, B)).$$

Пусть операторная функция $C(t)$ *сильно непрерывна и действует ограниченно из* B_+ *в* B_+. *Тогда равномерно корректна на* $[0,T]$ *задача Коши для возмущенного уравнения*

$$y' = B(t)\,y + \mathrm{I}C(t)\,y.$$

(Доказательство можно получить соображениями, близкими теореме о неявной функции).

Полагая теперь $y(x) = v(1,x)$, получаем решение (1).

3. Следствие. *Пусть в* (1) $A(x) = A$. *Обозначим через* A_x *неограниченный оператор в* B *такой, что* $A_x y = A\cdot y\cdot x$. *Условие* а) *теоремы* 1

запишется в виде $A_{s_1}A_{s_2} = A_{s_2}A_{s_1}$ *на плотном множестве в* B. *В условии б) достаточно потребовать, чтобы все операторы* A_x *для* $x \in K$ *были инфинитезимальными образующими для полугрупп.*

Непрерывную зависимость от x можно вывести из сделанных предположений. Для конечномерного E этот результат, в частности, содержится в работе [4].

4. Пусть ξ — банахово расслоение класса C^k над банаховым многообразием M, его плотным подрасслоением ξ' назовем векторное (уже не банахово) расслоение над M такое, что каждый слой ξ' является плотным линейным подпространством соответствующего слоя ξ. Пусть в слоях введена новая (более сильная) норма, превращающая ξ' в банахово расслоение, которое будем обозначать через ξ_+; через $\mathbf{I}$ обозначим вложение ξ_+ в ξ.

Пусть $J_i(\xi)$ — i-струйное расслоение расслоения ξ (это снова расслоение над M класса C^{k-i} [2, 5]). Обозначая через $j^i(s)$ i-струйное продолжение сечения s расслоения ξ, имеем каноническое вложение $J_{i+m}(\xi) \to J_i(J_m(\xi))$ такое, что $j^i(j^m(s)) = j^{i+m}(s)$ для всех локальных сечений s расслоения ξ. Для ξ и η — расслоений над M и их морфизма $f : \xi \to \eta$ (тождественного на базе) — порождается морфизм $J_i(f) : J_i(\xi) \to J_i(\eta)$ такой, что $J_i(f)(j^i(s))(x) = j^i(f \circ s)(x)$ [5].

Рассмотрим вложение $\varphi : N \to M$. Для всякого расслоения ξ над M порождается морфизм $\tilde{\varphi} : J_1(\xi)|_{\varphi(N)} \to J_1(\varphi^*\xi)$ сужения $J_1(\xi)$ над образом φ в 1-струйное расслоение обратного образа $\varphi^*\xi$. Опишем его: каждому сечению s расслоения ξ соответствует сечение $\tilde{s}$ расслоения $\varphi^*\xi$ — обратный образ сужения s на $\varphi(N)$ и для $x \in \varphi(N)$ $\tilde{\varphi}$ переводит $j^1(s)(x)$ в $j^1(\tilde{s})(\varphi^{-1}(x))$. Локально: если $\xi = E \times B$, $E = N \times E'$, то точке (x, y, C) расслоения $J_1(\xi)|_N$ соответствует точка $(x, y, \tilde{C})$, где оператор $\tilde{C}$ — сужение $C \in L(N \times E', B)$ на N.

Определение 1. Линейным однородным дифференциальным уравнением (далее д. у.) назовем вложение $i : \xi_+ \to J_1(\xi)$ банаховых расслоений (т. е. линейное на каждом слое), а его решением с начальным условием $y_0 \in \xi_+$ — локальное сечение s расслоения ξ_+, проходящее через y_0, такое, что сечение $\mathbf{I}s$ расслоения ξ — класса C^1 и для него $j^1(\mathbf{I}s) \subset \operatorname{Im} i$.

Если ξ, ξ_+ — расслоения с базой $[0, T]$, то i назовем обыкновенным д. у.; для него определена равномерная корректность задачи Коши.

Локально, если $\xi_+ = E \times B_+$, $\xi = E \times B$, B_+ плотно в B и $y_0 = (0, \bar{y}_0)$, то $J_1(\xi) = E \times B \times L(E, B)$. Считая, что i отображает тождественно первый сомножитель и является вложением B_+ в B на B_+, можем задавать i операторной функцией $A(x) : B_+ \to L(E, B)$. Операторы $A(x)$ имеют постоянную область определения, замкнуты и неограничены, если $B_+ \neq B$. Решения д. у. описываются в данной тривиализации функцией $s(x)$, удовлетворяющей уравнению $Dy(x) = A(x)\,y(x)$ с начальным условием $y(0) = \bar{y}_0$.

5. Проиллюстрируем, как формулируется на этом языке классическая теорема Фробениуса. Пусть теперь ξ — локально тривиальное (не обязательно линейное) расслоение, слой и база которого — банаховы многообразия, д. у. — вложение $i : \xi \to J_1(\xi)$ а его решение — сечение s расслоения ξ, проходящее через y_0 (начальное условие), и такое, что $j^1(s) \subset \operatorname{Im} i$. Локально такое уравнение описывается отображением $f : E \times B \to L(E, B)$, а его решение удовлетворяет д. у. $Dy(x) = f(x, y)$.

Теорема Фробениуса. *Пусть* ξ — *расслоение класса* C^2 *и* $i : \xi \to J_1(\xi)$ — *д. у. Для локальной разрешимости* i *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$J_1(i) \circ i(\xi) \subset J_2(\xi). \qquad (6)$$

Замечание 1. Это условие можно записать так же, как условие точности последовательности

$$0 \to \xi \xrightarrow{i} J_1(\xi) \xrightarrow{J_1(i)} J_1(J_1(\xi)) \to J_1(J_1(\xi))/_{J_2(\xi)} \to 0$$

(здесь предпоследняя стрелка — эпиморфизм факторизации).

Замечание 2. В несколько иной (разумеется эквивалентной) форме условие Фробениуса в струях имеется в [5]. Рассматриваемые там д. у. линейны, однако самого общего вида.

Доказательство эквивалентности (6) и (3) легко получить локальными рассмотрениями.

6. Снова рассмотрим $\pi : \xi \to M$, $\pi_+ : \xi_+ \to M$ — банаховы расслоения и д. у. $i : \xi_+ \to J_1(\xi)$. Определим «уравнения в направлениях» и для этого предположим, что на M задана пульверизация [3]. Для каждого касательного вектора v к базе в точке x_0 определена геодезическая $\gamma_v : [0, T] \to M$, образ которой также обозначим через γ_v, $\exp_{x_0}$ — соответствующее экспоненциальное отображение.

Определение 2. Для д. у. $i : \xi_+ \to J_1(\xi)$ и v из TM_{x_0} (касательного пространства к M в точке x_0) назовем соответствующим д. у. в направлении v обыкновенное д. у. $i_v : \gamma_v^*\xi_+ \to J_1(\gamma_v^*\xi)$, где i_v есть композиция отображений $\gamma_v : \gamma_v^*\xi_+ \to \xi_+$, $i : \xi_+ \to J_1(\xi)$ и $\widetilde{\gamma_v} : J_1(\xi)|_{\gamma_v} \to J_1(\gamma_v^*\xi)$ (см. п. 4).

Локально, если $\gamma_v = \{tv\}_{t\in[0,T]}$ и i описывается уравнением (1), то i_v описывается уравнением (2) при $x = v$.

Естественно вкладывая решение уравнения по направлению в ξ_+ (в ξ), можно говорить о непрерывной зависимости решения от направления.

Теорема 2. *Пусть K — конус в TM_{x_0} ($K \setminus \{0\}$ — открыто), $U = \exp_{x_0} K$ и в $\pi_+^{-1}(U)$:*

а) *для отображения $J_1(i) \circ i$ область определения плотна в ξ_+; область изменения принадлежит $J_2(\xi)$;*

б) *для всякого $x \in K$ задача Коши для соответствующего уравнения в направлении x равномерно корректна и решение (т. е. сечение соответствующего расслоения, вложенное в ξ_+) непрерывно зависит от направления.*

Тогда для всякого $y_0 \in \pi_+^{-1}(x_0)$ существует и единственно решение д. у. i в U с начальным условием y_0, причем оно непрерывно зависит от начального условия.

Для доказательства достаточно выбрать в окрестности точки y_0 такую тривиализацию, которая на нулевом сечении (отождествленном с базой M) совпадает с $\exp_{x_0}^{-1}$, и воспользоваться теоремой 1.

Автор благодарит Ю. Л. Далецкого за постановку задачи и руководство этой работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ж. Дьедонне, Основы современного анализа, «Мир», М., 1964.
2. С. Ленг, Введение в теорию дифференцируемых многообразий, «Мир», М., 1967.
3. С. Г. Крейн, Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, «Наука», М., 1967.
4. С. Г. Крейн и А. М. Шихватов, Линейные дифференциальные уравнения на группе Ли, Функциональный анализ и его приложения, т. 4, вып. 1, 1970.
5. Д. Спенсер, Переопределенные системы, Математика, т. 11, № 2, 1970.

Поступила 18.V 1973 г.,
после переработки — 10.I 1974 г.
Киевский политехнический институт